

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ СА ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА НА
ГРАЂЕВИНСКО-АРХИТЕКТОНСКОМ ФАКУЛТЕТУ У НИШУ

Предговор

Ова збирка је намењена ученицима средњих школа који се припремају за пријемни испит из математике за упис на све смерове грађевинског одсека Грађевинско-архитектонског факултета и садржи задатке са пријемних испита на овом факултету у периоду од 1977. до 2015. године. Сви задаци у роковима од 1977. до 1998. године детаљно су решени. Збирка пружа могућност сагледавања карактера задатака који се могу појавити на пријемном испиту. На интернет адреси <http://rc5.gaf.ni.ac.rs/dec/matematika/mat/system/index.php> Грађевинско-архитектонског факултета у Нишу налазе се збирке задатака са пријемних испита на неким техничким факултетима, као и обиље материјала које може послужити за припрему пријемног испита.

На самом почетку је дат програм за полагање класификационог испита из математике. Напомињемо да се у јунском испитном року 1984. године за израду једног задатка коришћени изводи, али је према наведеном програму ова област изостављена.

Почев од 2004. године пријемни испит из математике полагани су на измењен начин у односу на дотадашњи. Уз текстове задатака понуђено је више одговора, од којих треба заокружити само један.

**ПРОГРАМ ЗА ПОЛАГАЊЕ КЛАСИФИКАЦИОНОГ
ИСПИТА ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

1. Елементи алгебре скупова, логичког закључивања и комбинаторике.
2. Скуп целих бројева, алгебра целих и рационалних израза.
3. Линеарне једначине и неједначине.
4. Степеновање и кореновање.
5. Тачка, права, раван, подударност. Вектори.
6. Изометријске трансформације.
7. Површина многоугла.
8. Хомотетија и сличност.
9. **Елементи тригонометрије.** Тригонометријске функције оштрог угла. Основни тригонометријски идентитети. Таблица тригонометријских функција. Решавање правоуглог троугла. Мерење угла, радијан. Тригонометријске функције ма ког угла, графици функција $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Тригонометријске једначине једноставнијих облика. Синусна и косинусна теорема са применама.
10. **Квадратна једначина и квадратна функција.** Квадратна једначина и њено решавање. Природа решења квадратне једначине, дискриминанта. Вијетове формуле. Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце. Примене. Квадратна функција и њено испитивање (нуле, знак, екстремна вредност, график). Неједначине облика $ax^2 + bx + c \geq 0$ и $ax^2 + bx + c \leq 0$. Систем од једне квадратне и једне линеарне једначине. Биквадратне једначине. Ирационалне једначине.
11. **Експоненцијална и логаритамска функција.** Експоненцијална функција и њено испитивање. Експоненцијалне једначине. Логаритамска функција и њено испитивање. Основна правила логаритмовања. Логаритамске једначине. Декадни логаритми. Примена логаритама (са употребом таблица).
12. **Круг.** Дужина кружнице и кружног лука. Површина круга, кружног исечка и одсечка.
13. **Полиедри.** Ортогоналност правих и равни. Угао између праве и равни. Диједар и рогаљ. Полиедар, правилан полиедар. Призма, пирамида и њихови равни пресеци. Површина полиедра. Запремина призме, пирамиде и зарубљене пирамиде.

14. **Обртна тела.** Цилиндрична, конусна и обртна површ. Прав ваљак, права купа, зарубљена права купа и њихове површине и запремине. Сфера. Сфера и раван. Површина лопте, сферне калоте и појаса. Запремина лопте.
15. **Дефиниција тригонометријских функција.** Алгебарска вредност вектора. Пројектовање вектора на осу, пројекција збира вектора на осу. Разлагање вектора на компоненте. Координате вектора. Уопштење појма угла. Мерење угла. Радијан, кружни лук. Кружни исечак. Кружни одсечак. Дефиниција тригонометријских функција ма ког угла (својства тригонометријских функција). Основни тригонометријски идентитети.
16. **Испитивање и графичко представљање тригонометријских функција.** Графичко одређивање вредности синуса, косинуса, тангенса и котангенса ма ког угла. Рашћење и опадање тригонометријских функција. Вредности тригонометријских функција углова од 0° , 90° , 180° , 270° и 360° . Свођење на први квадрант. Тригонометријске функције апстрактног аргумента. Графичко приказивање тока тригонометријских функција $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\sin(ax + b)$.
17. **Адиционе формуле за тригонометријске функције.** Угао између два вектора. Израчунавање алгебарске вредности пројекције вектора. Скаларни производ два вектора. Синус збира и разлике углова. Косинус збира и разлике углова. Тангенс збира и разлике углова. Трансформације збира и разлике тригонометријских функција у производ.
18. **Тригонометријске једначине и неједначине са геометријском интерпретацијом.** Једначина облика : $\sin x = a$ и $f(\sin x) = 0$, $\cos x = a$ и $f(\cos x) = 0$, $\operatorname{tg} x = a$ и $f(\operatorname{tg} x) = 0$. Тригонометријске неједначине : $\sin x < a$, $\cos x < a$ и $\operatorname{tg} x < a$.
19. **Примена тригонометрије у планиметрији и стереометрији.**
20. **Биномна формула.**
21. **Тачка и права у равни и њихове једначине.** Растојање две тачке. Подела дужи по датој размери. Површина троугла, услов да три тачке леже на истој правој. Разни облици једначине праве (експлицитни, општи, права датог правца кроз једну тачку, права кроз две тачке) Конструкција праве чија је једначина дата. Међусобни положај двеју правих, пресек, угао између двеју правих, паралелност, ортогоналност. Положај тачке према правој.
22. **Криве у равни и њихове једначине.** Формирање једначине геометријског места тачака. Транслација координатног система. Конусни пресеци: круг, елипса, хипербола, парабола -дефиниција, својства, једначине. Права и круг, елипса, хипербола, парабола (међусобни положај).

23. **Системи линеарних алгебарских једначина.** Систем линеарних једначина : нехомоген, хомоген, решења система, сагласан и несагласан систем. Гаусов алгоритам. Слободне и везане непознате у систему линеарних једначина.
24. **Системи линеарних алгебарских неједначина.** Систем линеарних неједначина, сагласан и несагласан систем, решење система. Решавање система линеарних неједначина са две или три непознате. Геометријска интерпретација система од n , $n > 2$ линеарних неједначина са две непознате.
25. **Реални бројеви, комплексни бројеви.** Основна својства поља реалних бројева. Својство непрекидности скупа реалних бројева. Комплексна равна. Модуло и аргумент комплексног броја. Тригонометријски облик комплексног броја. Операције са комплексним бројевима записаним у тригонометријском облику. Моаврова формула.

Септембар, 1975.

1. На сваку страну квадрата странице a нанесе се почев од једног темена у истом смеру $\frac{2}{3}a$ па се споје деоне тачке и тако се добије други квадрат. Од овог квадрата се истим поступком добије трећи итд. Наћи збир површина свих тих квадрата.
2. Наћи област дефинисаности функције

$$y = \sqrt{\frac{x-4}{x^2-4x+3}}.$$
3. Дата је хипербола $9x^2 - 4y^2 = 36$. Наћи површину троугла чија су темена координатни почетак, десна жижа и тачка на асимптоти која има исту апсцису као жижа, а налази се у првом квадранту.
4. Решити једначину $\sin 3x = \cos 2x$.

РЕШЕЊА 1. Странице квадрата добијених овим поступком су:

$$a_1 = a, a_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a, a_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}a_2, \dots,$$

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{3}a_{n-1} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1} a, \dots$$

Површине квадрата чине бесконачну геометријску прогресију

$$P_1 = a^2, P_2 = \frac{4}{9}a^2, P_3 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 a^2 = \frac{4}{9}P_1, \dots,$$

$$P_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} a^2 = \frac{4}{9}P_{n-1}.$$

Укупна површина је у ствари сума ове бесконачне геометријске прогресије:

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots = \frac{P_1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{a^2}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5}a^2.$$

2. Област дефинисаности дате функције је

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-4}{x^2-4x+3} \geq 0 \wedge x^2-4x+3 \neq 0 \right\}$$

Како је $\frac{x-4}{x^2-4x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{(x-1)(x-3)} \geq 0$, из табеле налазимо да је област дефинисаности дате функције $D_f = (1, 3) \cup [4, +\infty)$.

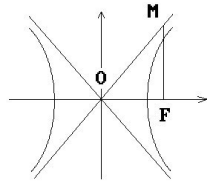
3. Из услова задатка имамо

	1	3	4
$x-1$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$x-4$	-	-	+
$\frac{x-4}{(x-1)(x-3)}$	+	-	-

$$9x^2 - 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 9.$$

Асимптоте су $y = \pm \frac{3}{2}x$, а жиже $F_1(\sqrt{13}, 0)$ и $F_2(-\sqrt{13}, 0)$.

Површина траженог троугла (слика 1) је $P = \frac{OF \cdot FM}{2}$. Како је $OF = \sqrt{13}$ и $MF = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{13}$, следи да је $P = \frac{\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}}{4} = \frac{39}{4}$.



Слика 1

4. Познатим тригонометријским трансформацијама почетну једначину доведемо на облик из кога лако налазимо решење.

$$\begin{aligned} \sin 3x = \cos 2x &\Leftrightarrow \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Септембар, 1977.

1. Решити по x једначину $a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0$, ($a \neq 1$).
2. Дат је ромб већом дијагоналном d и оштрим углом α . Одредити површину и запремину тела које настаје ротацијом ромба око своје странице.
3. Одредити дужину оне тетиве елипсе $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ коју тачка $(1, \frac{1}{2})$ полови.
4. Наћи сва решења једначине $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$.

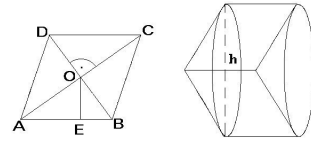
РЕШЕЊА 1. Очигледним трансформацијама добијамо

$$a^x - a^{x-3} - a^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^x - \frac{a^x}{a^3} = a^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$a^x \frac{a^3 - 1}{a^3} = a^3 - 1 \Leftrightarrow a^x = a^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

2. Нека је $ABCD$ ромб, O пресек његових дијагонала, E подножје нормале из O на основицу $AB = a$ и h његова висина (слика 2). На основу особина ромба је $OE = \frac{h}{2}$, $AO = \frac{d}{2}$ и $\angle AOB = \frac{\alpha}{2}$.

Запремина насталог тела једнака је запремини цилиндра полупречника h и висине a ; површина тог тела једнака је збиру површина омотача поменутог ваљка и двоструког омотача купе полупречника h и изводнице a (слика 3).



Слика 2 Слика 3

Како је $h = d \sin \frac{\alpha}{2}$, $a = \frac{d}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$, добијамо да је

$$V = h^2 a \pi = \frac{d^3 \pi}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad P = 4 h a \pi = 2 d^2 \pi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

3. Тетива чију дужину тражимо припада правој која пролази кроз тачку $M(1, \frac{1}{2})$, чија је једначина после сређивања $l: y = mx + \frac{1-2m}{2}$, $m \in \mathbb{R}$. Параметар m одређујемо из услова $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$, при чему су x_1, x_2 апсцисе пресека праве l и елипсе. Заменом y из једначине праве у једначини елипсе добијамо

$$x^2(4m^2 + 1) + 4m(1 - 2m)x + 4m^2 - 4m - 3 = 0.$$

Сада, на основу Вијетових правила, следи

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{4m(2m - 1)}{2(4m^2 + 1)} = 1 \Leftrightarrow 2m(2m - 1) = 4m^2 + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Решавањем система једначина праве $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ и елипсе добијамо да су $A(2, 0)$ и $B(0, 1)$ њихове пресечне тачке. Дужина тетиве је $\sqrt{5}$.

$$4. \quad 3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3 \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \wedge t = \sin x$$

$$\Leftrightarrow (t = \frac{1}{2} \vee t = -2) \wedge t = \sin x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Септембар, 1978.

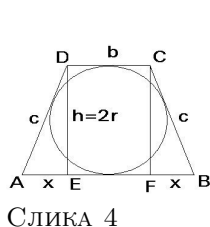
1. Решити једначину $\log(x - 1) + 2 \log \sqrt{x + 2} = 1$.

- Око круга полупречника r описан је једнакокраки траpez чији је крак нагнут према основици под углом од 60° . Израчунати. стране трапеза у функцији полупречника r .
- Решити једначину $3 + 4 \cos x + \cos 2x = 0$.
- Одредити једначину круга који додирује осе x и y и чији центар лежи на правој $3x - 5y + 14 = 0$.

РЕШЕЊА

- Користећи особине логаритма налазимо

$$\begin{aligned} \log(x-1) + 2 \log \sqrt{x+2} &= 1 \Leftrightarrow \log(x-1) + \log(x+2) = 1 \\ \Leftrightarrow \log[(x-1)(x+2)] &= 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 10 \wedge x > 1 \\ \Leftrightarrow (x = -4 \vee x = 3) \wedge x > 1 &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$



Слика 4

2. Нека је $ABCD$ једнакокраки траpez, E подножје висине из темена D и F подножје висине из темена C . Ознаке дужина страница трапеза, његове висине и дужине подударних катета правоуглих троуглова AED и BFC дате су на слици 4. Лако долазимо до закључка да је $a = b + 2x$ и $h = 2r$. Како је траpez $ABCD$ тангентан према поставци задатка, то је $a + b = 2c$, тј. $b + x = c$. Даље, имамо да је $x = c \cos 60^\circ = \frac{c}{2}$ и $x = 2r \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$. Сада је $c = 2x = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$, па следи $b = c - x = \frac{c}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ и $a = 2c - b = \frac{8r\sqrt{3}}{3} - \frac{2r\sqrt{3}}{3} = 2r\sqrt{3}$.

- Примењујући тригонометријске трансформације налазимо

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos x + \cos 2x &= 0 \Leftrightarrow 3 + 4 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 4 \cos x + 2 &= 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

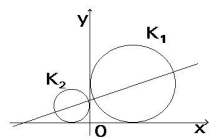
- Потражићемо једначину кружнице K у облику

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Услов да кружница додирује координатне осе као и да центар кружнице $C(p, q)$ припада датој правој, еквивалентан је услови да p, q и r задовољавају систем једначина

$$|p| = |q| = r, \quad 3p - 5q + 14 = 0. \quad (1)$$

Зато p, q и r добијамо решавањем овог система.



Слика 5

(i) Ако је $p > 0$ и $q > 0$, онда из система (1) добијамо $p = q = r$ и $3r - 5r + 14 = 0$ па је $p = q = r = 7$. Једначина кружнице K је

$$(x-7)^2 + (y-7)^2 = 49.$$

(ii) Ако је $p < 0$ и $q > 0$ онда из система (1) добијамо

$$q = r, \quad p = -r, \quad -3r - 5r + 14 = 0$$

па је $p = -\frac{7}{4}$ и $q = r = \frac{7}{4}$. У овом случају једначина кружнице K гласи

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

(iii) Ако је $p > 0$ и $q < 0$ онда из система (1) добијамо $p = r$, $q = -r$ и $3r + 5r + 14 = 0$. У овом случају не постоји кружница јер је $r = -\frac{7}{4} < 0$.

На сличан начин закључујемо да не постоји кружница ако је $p < 0$ и $q < 0$.

Графички приказ решења дат је на слици 5. Напоменимо да смо центре кружница K_1 и K_2 могли да одредимо и решавањем система једначина $p = -q$, $3p - 5q + 14 = 0$, односно $p = q$, $3p - 5q + 14 = 0$.

Септембар, 1979.

1. Решити једначину $\cos^3 x - \cos 2x \cos x = 0$.
2. У правилну тространу призму уписана је лопта, која додирује све три бочне стране и оба базиса. Одредити однос површине лопте и површине призме.
3. Решити неједначину $\frac{2x-1}{x+1} > x-1$.
4. Одредити једначину тангенте круга $x^2 + y^2 = 4$ која је нормална на правој $x - 2y = 3$.

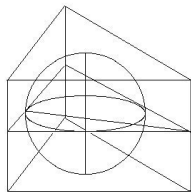
РЕШЕЊА

1. Користећи адициону формулу за косинус двоструког угла, добијамо

$$\begin{aligned} \cos^3 x - \cos 2x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \cos^3 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow x = k\pi \vee x &= k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z. \end{aligned}$$

2. Означимо са R полупречник лопте, а са a базисну ивицу једнако-страничног троугла и са H бочну ивицу дате призме (слика 6).

На основу претпоставки закључујемо да је $H = 2R$, $R = \frac{h}{3}$. Како је $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тада је $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Нека је P_1 површина правилне тростране призме и P_2 површина уписане лопте. Тада је



$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4R^2\pi}{2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH} = \frac{4\frac{3a^2\pi}{36}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{a^2\pi}{3}}{\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$$

Слика 6

3. После трансформације, добијамо

$$\frac{2x-1}{x+1} > x-1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-x^2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(2-x)}{x+1} > 0.$$

	-1	0	2	
x	-	-	+	+
$2-x$	+	+	+	-
$x+1$	-	+	+	+
$\frac{x(2-x)}{x+1}$	+	-	+	-

Решење последње неједначине тражимо помоћу табеле, из које видимо да су решења дате неједначине сви реални бројеви x за које важи $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$.

4. Једначина дате праве у експлицитном облику је $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Све праве ортогоналне са датом правом имају коефицијент правца $m = -2$, па је њихова једначина

$$y = -2x + n, \quad n \in R.$$

Параметар n одредићемо из услова додира праве и кружнице, тј. из једнакости $r^2(1+m^2) = n^2$, при чему је $r = 2$ и $m = -2$. Сада имамо

$$n^2 = 4 \cdot 5 \Leftrightarrow n = 2\sqrt{5} \vee n = -2\sqrt{5}.$$

Једначине тражених тангената су:

$$t_1 : y = -2x + 2\sqrt{5} \quad t_2 : y = -2x - 2\sqrt{5}.$$

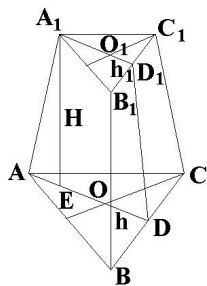
Јуни, 1982.

- Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су $a = 18\text{cm}$, $b = 6\text{cm}$, а бочна ивица заклапа са равни веће основе угао $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Одредити запремину ове пирамиде.
- Решити једначину $\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \text{ctg} x = 0$.
- Дата је функција $f(x) = 1 + \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$.
 - Испитати знак функције $f(x)$.
 - Одредити координате пресечних тачака криве $y = 1 + \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$ са координатним осама.
- Права $x - 2y - 6 = 0$ сече параболу $y^2 = 2x$ у двама тачкама. Одредити једначине тангената у пресечним тачкама и наћи угао између њих.
- Решити једначину $(2+i)x^2 - (5-i)x + 2 - 2i = 0$.

РЕШЕЊА

1. Формула за запремину зарубљене пирамиде је $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$, где је H висина, а B_1 и B_2 површине основа. Површине основа ћемо лако израчунати, а глани проблем је одређивање висине зарубљене пирамиде.

Нека су A, B, C, A_1, B_1, C_1 темена правилне тростране зарубљене пирамиде (слика 7). Нормални пресек ADD_1A_1 ове пирамиде је трапез чије основице су висине h и h_1 једнакокрајних троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ и $\angle A_1AD = 60^\circ$.



Слика 7

Ако је O пресек висина $\triangle ABC$, тада је $AO = \frac{2h}{3}$, где је h одговарајућа висина. Слично је $A_1O_1 = \frac{2h_1}{3}$, где је O_1 пресек висина $\triangle A_1B_1C_1$. Означимо са E подножје нормале из A_1 на основу трапеца ADD_1A_1 , тада је $A_1E = H$ висина трапеца, а то је и висина дате пирамиде. Сада имамо да је

$$\frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3},$$

$$\frac{2}{3}h_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$H = A_1E = AE \operatorname{tg} 60^\circ = \left(\frac{2}{3}h - \frac{2}{3}h_1 \right) \sqrt{3} = (6\sqrt{3} - 2\sqrt{3})\sqrt{3} = 12$$

$$V = \frac{H}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{H(a^2 + ab + b^2)\sqrt{3}}{12} = 468\sqrt{3}.$$

2. Дату једначину доводимо на еквивалентан облик

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \operatorname{ctg} x &= 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{ctg} x \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. Како је

$$1 + \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)^2+2}{(x-1)(x-2)}$$

и $(x-1)^2+2 > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, онда $f(x)$ има исти знак као и производ $(x-1)(x-2)$. Како је

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2) &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-1 > 0 \wedge x-2 > 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x-2 < 0) \\ \Leftrightarrow x-1 < 0 \vee x-2 > 0, \end{aligned}$$

слиеди $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$. График дате функције сече y -осу у тачки $A(0, f(0))$, па је $A(0, 3/2)$, али не сече x -осу јер је $(x-1)^2+2 \neq 0$ за сваки $x \in \mathbb{R}$.

4. Најпре тражимо заједничке тачке праве и параболе и због тога решавамо систем састављен од њихових једначина. Из једначине праве је $x = 2y + 6$, па кад то сменимо у једначини параболе добијамо квадратну једначину $y^2 - 4y -$

$12 = 0$ чија су решења -2 и 6 . Одговарајуће вредности за x су 2 и 18 па тачке $A(2, -2)$ и $B(18, 6)$ јесу њихове заједничке тачке.

Једначина тангенте параболе $y^2 = 2px$ у тачки $M(x_1, y_1)$ дата је једначином $y - y_1 = p(x + x_1)$, где је p параметар параболе. Како је у овом случају $p = 1$, то су праве $y = -\frac{1}{2}x - 1$ и $y = \frac{1}{6}x + 3$ тангенте дате параболе редом у тачкама A и B . Ако су m_1 и m_2 коефицијенти праваца добијених тангенти, угао између тангената рачунамо по формули $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$. Дакле, овде је

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{8}{11}, \text{ одакле је } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{8}{11}.$$

5. Дискриминанта дате квадратне једначине је $D = (5 - i)^2 - 4(2 + i)(2i - 2) = -2i$. У тригонометријском облику је $D = -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$.

Један квадратни корен из комплексног броја D је $\sqrt{D} = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i$, а други $\sqrt{D} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi - \pi/2}{2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi - \pi/2}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i$.

Користећи формулу за решавање квадратне једначине, добијамо $x_1 = \frac{5 - i + (1 - i)}{2(2 + i)} = \frac{2(3 - i)}{2(2 + i)} = \frac{(3 - i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = 1 - i$ и $x_2 = \frac{(5 - i) - 1 + i}{2(2 + i)} = \frac{4}{2(2 + i)} = \frac{2(2 - i)}{5}$.

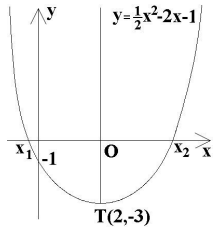
Јуни, 1983.

1. Дат је скуп параболоа $y = ax^2 - (2a + 1)x + 2(a - 1)$. Одредити ону параболу датог скупа која има екстремну вредност за $x = 2$. Конструисати график добијене параболое.
2. Одредити тангенте елипсе $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ које су нормалне на праву $x - y + 5 = 0$.
3. Наћи сва решења једначине $2 \cos^2 x + \cos 4x = 0$.
4. За које вредности $x \in \mathbb{R}$, разломак $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1}$ је мањи од -1 ?
5. Ромб $ABCD$ чије су дијагонале $AC = 4\text{dm}$ и $BD = 3\text{dm}$ ротира око праве која је управна на страницу AB и пролази кроз теме C ромба. Израчунати запремину насталог обртног тела.

РЕШЕЊА

1. График функције $y = mx^2 + nx + p$, $m \neq 0$ је параболоа са теменом $T(\alpha, \beta)$, где је $\alpha = -\frac{n}{2m}$. За $x = \alpha$ функција достиже екстремну вредност. У датом

случају је $\alpha = 2$, $n = -(2a + 1)$, $m = a$, па је $2 = \frac{2a + 1}{2a}$, одакле је $2a + 1 = 4a$, а само $a = \frac{1}{2}$.



Слика 8

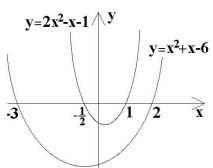
Дакле, за $a = \frac{1}{2}$ дата функција добија облик $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ и има екстремну вредност за $x = 2$. Како је коефицијент уз x^2 позитиван следи да има минимум и то је тачка $M(2, -3)$ јер је $y(2) = -3$. График сече x -осу за оне вредности x -а за које је $y = 0$, односно $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 1 = 0$, одакле следи $x_1 = 2\sqrt{6}$, $x_2 = 2 + \sqrt{6}$. Како је $y(0) = -1$ следи да график сече x -осу у тачки $N(0, -1)$. График функције приказан је на слици 8.

2. Ако су две праве узајамно нормалне и ако су m_1 и m_2 њихови коефицијенти правца, тада је $m_1 \cdot m_2 = -1$. Из ове познате чињенице следи да све праве нормалне на дату имају једначину $y = -x + n$, $n \in \mathbb{R}$. Параметар n одређујемо из познатог услова додира праве и елипсе који гласи $a^2 m^2 + b^2 = n^2$, при чему су a и b полуосе елипсе, m коефицијент правца праве, а n њен слободни члан. Овде је $a^2 = 6$, $b^2 = 3$, $m = -1$. Дакле, $n^2 = 9$, па следи $n_1 = -3$ или $n_2 = 3$. Закључујемо да постоје две тангенте дате елипсе које су нормалне на дату праву и њихове једначине су $y = -x - 3$ и $y = -x + 3$.

3. Како је $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$ и $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2 \cos^2 2x - 1$, то је $2 \cos^2 x + \cos 4x = 0$ еквивалентно са $\cos 2x + 2 \cos^2 2x = 0$, одакле је

$$\begin{aligned} \cos 2x(1 + 2 \cos 2x) &= 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 2 \cos 2x = -1 \\ \Leftrightarrow 2x &= k\pi + \frac{\pi}{2} \vee 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \vee x = k\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. Дати разломак доводимо на еквивалентан облик $\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1} + 1 < 0$, одакле је $\frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 1} < 0$.



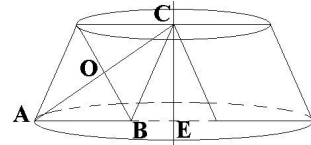
Слика 9

Из графика функција које се налазе у бројиоцу и у имениоцу можемо прочитати решења дате неједначине. График функције $y = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ јесте парабола окренута отвором навише која сече x -осу за $x = -3$ и $x = 2$.

График функције $y = 2x^2 - x - 1 = 2(x + \frac{1}{2})(x - 1)$ је такође парабола окренута отвором навише која сече x -осу за $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$. Ове параболе приказане су на слици 9. Са слике се види да је дата неједначина тачна за $x \in (-3, -1/2) \cup (1, 2)$.

5. Нека је O пресек дијагонала ромба и E подножје нормале из темена C на праву којој припада страна AB датог ромба (слика 10). Означимо са a , h и x редом страну ромба, његову висину и дужину дужи BE .

Из правоуглог троугла AOB , знајући да O полови дијагоналу, добијамо $a = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$. Даље, из једнакости $ah = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, јер обе стране ове једнакости представљају површину ромба, добијамо $h = \frac{12}{5}$. Из правоуглог троугла BEC је $x = \frac{7}{10}$.



Слика10

Нека је V_1 запремина зарубљене купе чији су полупречници базиса $R = a + x = \frac{16}{5}$, $r = a = \frac{5}{2}$ и висина $H = h = \frac{12}{5}$, а V_2 запремина купе полупречника основе x и висине H . Тада је $V = V_1 - V_2 = \frac{H\pi}{3}(R^2 + rR + r^2) - \frac{x^2 H\pi}{3} = \frac{H\pi}{3}(R^2 + rR + r^2 - x^2)$, па је $V = \frac{12\pi}{15} \left(\frac{256}{25} + 8 + \frac{25}{4} - \frac{49}{100} \right) = \frac{96\pi}{5}$.

Јуни, 1984.

1. Дат је систем једначина

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 &= 0 \\x - y + n &= 0.\end{aligned}$$

Одредити интервале за променљиви параметар n тако да решења датог система буду: (а) реална и неједнака, (б) реална и једнака, (в) коњуговано комплексна.

2. Наћи сва решења једначине $\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$.
3. Наћи површину троугла чије је теме у центру круга $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$, а основица троугла је одсечак круга на x -оси. Одредити углове троугла.
4. Дата је функција $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 2$.
 - (а) Одредити параметар a тако да функција има екстремну вредност за $x = -1$,
 - (б) За добијену вредност параметра a испитати промене функције и нацртати њен график.

РЕШЕЊА

1. Из линеарне једначине је $y = x + n$, па сменом у квадратној једначини, добијамо

$$\begin{aligned}x^2 + (x + n)^2 - 12x - 8(x + n) + 44 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2(n - 10)x + n^2 - 8n + 44 &= 0\end{aligned}$$

Природа решења ове квадратне једначине зависи од знака њене дискриминанте D . Како је

$$D = 4(n - 10)^2 - 8(n^2 - 8n + 44) = 4(12 - 4n - n^2) = 4(6 + n)(2 - n)$$

и како је $6 + n < 0$ за $n < -6$, $6 + n > 0$ за $n > -6$, $2 - n < 0$ за $n > 2$ и $2 - n > 0$ за $n < 2$, закључујемо да је $D < 0$ за $n \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$, а $D > 0$ за $n \in (-6, 2)$. Дакле: (а) систем има реална и различита решења за $D > 0$, односно за $n \in (-6, 2)$, (б) систем има реална и једнака решења за $D = 0$, односно за $n = -6$ и $n = 2$, (в) систем има коњуговано-комплексна решења за $D < 0$, односно $n \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

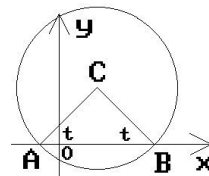
2. Како је $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ за $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, онда је за $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

једначина $\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ еквивалентна са $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x - 2 = 0$, одакле после множења добијамо $\operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0$ односно $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x - 2(\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1) = 0$, што даје $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 1) - 2(\operatorname{tg} x - 1)^2 = 0$. Тако на крају полазна једначина постаје $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2) = 0$ одакле је $\operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$.

Једначина $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2 = 0$ има комплексна решења по $\operatorname{tg} x$, па нема решења по x јер $\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$. Како дата једначина нема смисла за $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, то њена решења добијамо из једначине $\operatorname{tg} x = 1$ и онда је $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Како је $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$, закључујемо да кружница има центар у тачки $C(2, 4)$ и њен полупречник је $r = 5$. За $y = 0$ добија се $x^2 - 4x - 5 = 0$. Решења ове једначине су -1 и 5 .

Дакле, кружница сече x -осу у тачкама $A(-1, 0)$ и $B(5, 0)$. Троугао ABC је једнакокраки. Дужина основице је $AB = 6$ и висина која јој одговара је 4 (слика 11), па је његова површина $P = 12$.



Слика 11

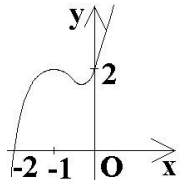
Угао t на основици троугла је такав да му је $\operatorname{tg} t = \frac{4}{3}$, тј.

$t = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Како је $\angle ACB = \pi - 2t$, то је $\operatorname{tg} \angle ACB = \operatorname{tg}(\pi - 2t) = -\operatorname{tg} 2t = \frac{2 \operatorname{tg} t}{\operatorname{tg}^2 t - 1} = \frac{24}{7} \Rightarrow \angle ACB = \operatorname{arctg} \frac{24}{7}$.

4. (а) Вредност параметра a одредићемо из услова да је $f'(-1) = 0$. Како је $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1$, то из $f'(-1) = 4 - 2a = 0$ следи $a = 2$.

(б) За $a = 2$ је $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Функција је дефинисана за $x \in (-\infty, +\infty)$. Како је

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 1) = 0$$



Слика 12

и како $x^2 + 1 = 0$ нема реалних решења, следи да је $x = -2$ нула испитиване функције и да њен график сече x -осу у тачки $B(0, 2)$. Из $f(x) = (x + 2)(x^2 + 1)$ следи $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-2, +\infty)$. Из $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = (x + 1)(3x + 1)$

закључујемо да је $f'(x) < 0$ за $x \in (-1, -1/3)$ и ту функција опада, а $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (-1/3, +\infty)$ и ту функција расте. Из тога следи да за $x = -1$ функција има максимум и како је $f(-1) = 2$ следи да је то тачка $M(-1, 2)$. За $x = -1/3$ функција има минимум и из $f(-1/3) = 50/27$ следи да је то тачка $N(-1/3, 50/27)$. Из $f''(x) = 6x + 4$ закључујемо да је $P(-2/3, 52/27)$ превојна тачка функције и да је функција конкавна за $x > -2/3$, а конвексна за $x < -2/3$. График испитиване функције приказан је на слици 12.

Јуни, 1985.

1. Решити једначину $\sin 5x = \cos 4x$.
2. У једначини круга $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 2m - 6 = 0$ одредити m да круг пролази кроз координатни почетак. Затим одредити једначину тангенте која је управана на праву $2x + 4y = 5$.
3. Укупна површина правилне четворостране пирамиде износи S . Бочна страна је нагнута према базису под углом t . Одредити запремину пирамиде.
4. Дата је квадратна једначина $x^2 - (8k - 2)x + 15k^2 - 2k - 7 = 0$. Одредити параметар k да једначина има : (а) реалне и различите корене, (б) реалне и једнаке корене, (ц) за реалне и једнаке корене нацртати график функције $y = f(x)$.
5. Решити једначину $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2$.

РЕШЕЊА

1. Полазну једначину доводимо на еквивалентан облик

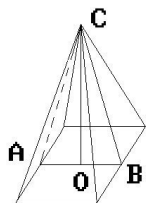
$$\sin 5x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x + \pi/2}{2} \sin \frac{9x - \pi/2}{2} = 0,$$

одакле добијамо $\frac{x + \pi/2}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee \frac{9x - \pi/2}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ односно $x = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{2k\pi}{9} + \frac{\pi}{18}$, $k \in \mathbb{Z}$.

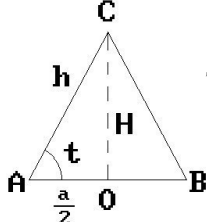
2. Из услова да круг пролази кроз координатни почетак $O(0, 0)$ добијамо да је $2m - 6 = 0$, тј. $m = 3$. Сада, за $m = 3$ дата круг има једначину $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$. Додавањем броја 25 и левој и десној страни претходне једначине добијамо $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ и то је канонска једначина посматраног круга. Из једначине дате праве написане у облику $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$, коришћењем услова нормалности, добијамо да све праве које су нормалне на дату праву имају коефицијент правца $k = 2$, па њихове једначине имају облик $y = 2x + n$, $n \in \mathbb{R}$. Услов додира праве $y = kx + n$ и кружнице $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ гласи $r^2(1 + k^2) = (kp - q + n)^2$. Заменом конкретних вредности из задатка који решавамо добијамо једначину $(n + 11)^2 = 125$. Једначина је задовољена за $n_1 = 5\sqrt{5} - 11$ и за

$n_2 = -5\sqrt{5} - 11$. Дакле, тангенте дате кружнице нормалне на дату праву су $t_1 : y = 2x + 5\sqrt{5} - 11$ и $t_2 : y = 2x - 5\sqrt{5} - 11$.

3. Нека је A средина једне основне ивице дате пирамиде, B средина основне ивице те пирамиде која је наспрам ивице на којој је A и C врх дате пирамиде (слика 13).



Слика 13



Слика 14

Закључујемо да је средина O старнице AB троугла ABC подножје висине пирамиде, да је $\triangle ABC$ једнакокраки, да је његов крак AC једнак висини бочне стране пирамиде и $\angle CAB = t$.

Означимо са a основну ивицу пирамиде, са H њену висину и са h висину бочне стране пирамиде (слика 14). Из $\triangle AOC$ је $h = \frac{a}{2 \cos t}$, $H = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} t$.

Сада је $S = a^2 + 2ah = a^2 + \frac{a^2}{\cos t} = a^2 \cdot \frac{1 + \cos t}{\cos t}$, одакле следи

да је $a = \sqrt{\frac{S \cos t}{1 + \cos t}}$ и

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} a^2 H = \frac{1}{6} a^3 \operatorname{tg} t = \frac{1}{6} \operatorname{tg} t \cdot \frac{S \cos t}{1 + \cos t} \sqrt{\frac{S \cos t}{1 + \cos t}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{S \sin t}{1 + \cos t} \sqrt{\frac{S \cos t}{1 + \cos t}}. \end{aligned}$$

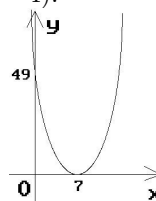
4. Дискриминанта D дате квадратне једначине је

$$D = (8k - 2)^2 - 4(15k^2 - 2k - 7) = 4(k^2 - 6k + 8) = 4(k - 2)(k - 4).$$

а) Једначина има реална и различита решења за $D > 0$, односно за $k \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$,

б) Једначина има реална и једнака решења за $D = 0$, односно за $k = 2$ или $k = 4$,

ц) За $k = 2$ добијамо функцију $y = x^2 - 14x + 49$ и њен график је приказан на слици 15.



Слика 15

5. Како је $x^2 - 11x + 43 = \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{54}{4} > 0$ за сваки $x \in \mathbb{R}$, то је $\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 43 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 9$.

Јуни, 1986.

- Одредити једначину праве која одсеца на y -оси два пута већи одсечак него на x -оси и додирује кружницу чија једначина је $(x - 7)^2 + y^2 = 20$.
- Одредити бројчану вредност параметра m у квадратној једначини $4x^2 - 15x + 4m^2 = 0$ да би један корен био квадрат другог.
- Дат је правоугаоник чији је обим $2p$. Одредити странице правоугаоника тако да његова површина буде максимална и скицирати дијаграм површине.

4. Решити тригонометријску једначину $\sin 6x = \sin 4x$.

РЕШЕЊА

1. У једначини праве $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ одредимо a и b тако да је $|b| = 2|a|$ и да за ту праву и дату кружницу важи услов додира $r^2(1 + m^2) = (mp - q + n)^2$. Како је $r^2 = 20$, $p = 7$, $q = 0$, $m = -\frac{b}{a}$, $n = b$, онда a и b добијамо из система једначина

$$|b| = 2|a|, \quad 20 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = \left(-7\frac{b}{a} + b\right)^2. \quad (2)$$

(а) За $a > 0$, $b > 0$ прва једначина система постаје $b = 2a$, па заменом у другој добијамо

$$(2a - 14)^2 = 100 \Leftrightarrow 2a - 14 = \pm 10 \Leftrightarrow a_1 = 12 \vee a_2 = 2 > 0$$

Дакле, у овом случају је $b_1 = 24$, $b_2 = 4$, па су једначине тангената $t_1 : \frac{x}{12} + \frac{y}{24} = 1$ и $t_2 : \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$.

(б) За $a > 0$, $b < 0$ прва једначина је $b = -2a$, па заменом у другој добијамо $(14 - 2a)^2 = 100 \Leftrightarrow 14 - 2a = \pm 10 \Leftrightarrow a_1 = 12 \vee a_2 = 2$. Даље следи да је $b_1 = -24$, $b_2 = -4$, па су једначине тангената $t_3 : \frac{x}{12} - \frac{y}{14} = 1$ и $t_4 : \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$. У случају $a < 0$, $b < 0$ систем (2) нема решења јер прва једначина има облик $b = 2a$, одакле се добија $a_1 = 12$, $a_2 = 2$ што је немогуће. Из сличних разлога систем нема решења ни у случају $a < 0$, $b > 0$.

2. Коришћењем Вијетових правила и датог услова добијамо систем једначина $x_1 + x_2 = \frac{15}{4}$, $x_1 x_2 = m^2$, $x_1 = x_2^2$.

Из прве и треће једначине, методом замене, добијамо $x_1 = \frac{9}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$ или $x_1 = \frac{25}{4}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$. У првом случају друга једначина постаје $m^2 = \frac{27}{8}$, па је $m = \frac{3\sqrt{6}}{4}$ или $m = -\frac{3\sqrt{6}}{4}$. У другом случају не постоји m за који важи $x_1 x_2 = m^2$.

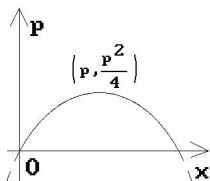
3. Означимо са x и y странице правоугаоника. Из датог услова добијамо да је $2(x+y) = 2p$, тј. $y = p-x$. Површина правоугаоника је $P(x) = x(p-x) = px - x^2$.

График ове функције је парабола која има максимум за $x = \frac{p}{2}$ јер је коефицијент уз квадратни члан негативан. Закључујемо да је површина правоугаоника максимална за $x = y = \frac{p}{2}$.

Функција $P(x) = x(p-x)$ има смисла за $x \in (0, p)$ јер је за те вредности променљиве x површина P позитивна. График функције приказан је на слици 16.

4. Како је $\sin 6x = \sin 4x \Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = 0$ односно $2 \cos 5x \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = 0 \vee \sin x = 0$, то је

$$5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \vee x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Слика 16

Јуни, 1987.

- Одредити параметар $m \in \mathbb{R}$ тако да неједначина $(1-m^2)x^2 + 2(m-1)x + 1 > 0$ буде задовољена за свако x .
- Решити једначину $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
- Бочне ивице правилне троуглаоне зарубљене пирамиде нагнуте су према равни основе под углом 60° . Основне ивице су a и b ($a > b$). Одредити запремину зарубљене пирамиде.
- Из тачке $A(2,7)$ повучене су тангенте на елипсу $x^2 + 4y^2 = 100$. Одредити одсечке ових тангената на координатним осама.
- Решити систем једначина $3^x \cdot 2^y = 576$, $\log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4$.

РЕШЕЊА

1. Да би неједначина важила за свако x треба да је коефицијент уз најстарији члан позитиван као и да је дискриминанта D негативна; дакле,

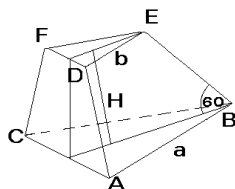
$$\begin{aligned} (\forall x) \quad & (1-m^2)x^2 + 2(m-1)x + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow & D = 8m(1-m) < 0 \wedge 1-m^2 > 0 \\ \Leftrightarrow & m \in (0,1) \cap (-1,1) = (0,1) \end{aligned}$$

Значи, неједначина је задовољена за све вредности m које припадају интервалу $(0,1)$.

2. Примењујући основне тригонометријске трансформације добијамо

$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 & \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} - (1 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} (1 - 2 \sin \frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \vee 1 - 2 \sin \frac{x}{2} = 0 \\ & \Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 4k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. Запремина зарубљене пирамиде је $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$ Према претпоставци имамо $B_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $B_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Треба израчунати висину H . На основу слике 17 је $\frac{H}{\frac{(a-b)\sqrt{3}}{3}} = \operatorname{tg} 60^\circ$, то јест, $H = a - b$.



Слика 17

Тражена запремина је

$$V = \frac{a-b}{3} \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{3}}{12}.$$

4. Тангента пролази кроз тачку $A(2,7)$ па је њена једначина

$$y - 7 = k(x - 2) \Leftrightarrow y = kx + 7 - 2k.$$

Услов додира елипсе и ове праве је $a^2k^2 + b^2 = n^2$ тј. $100k^2 + 25 = (7 - 2k)^2$. Одавде следи $24k^2 + 7k - 6 = 0$ па налазимо $k_1 = \frac{3}{8}$ и $k_2 = -\frac{2}{3}$. Пошто је $n = 7 - 2k$ добијамо $n_1 = \frac{50}{8}$ и $n_2 = \frac{25}{3}$. Једначине тангената су

$$t_1 : y = \frac{3}{8}x + \frac{50}{8} \quad \text{или} \quad t_1 : \frac{x}{-50/3} + \frac{y}{50/8} = 1,$$

$$t_2 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3} \quad \text{или} \quad t_2 : \frac{x}{25/2} + \frac{y}{25/3} = 1.$$

Одсечци ових тангената на координатним осама су: за t_1 : на x -оси $a_1 = -\frac{50}{3}$, на y -оси $b_1 = \frac{50}{8}$, за t_2 : на x -оси $a_2 = \frac{25}{2}$, на y -оси $b_2 = \frac{25}{3}$.

5. Из друге једначине система $\log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4$ следи $y - x = 4$ односно $y = x + 4$. Сменом у првој једначини добијамо $3^x \cdot 2^{x+4} = 576 \Rightarrow 6^x = 36 \Rightarrow x = 2$. Одавде је $y = 6$. Решење система је $x = 2$ и $y = 6$.

Јуни, 1988.

1. Израчунати $(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1}$ ако је $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$.
2. Решити неједначину $\frac{1}{x^2 - 1} + 1 > 0$.
3. За једначину $2x^2 - 2x - 10 = \frac{1}{4}$ наћи збир квадрата њених решења.
4. Решити једначину $\log(x - 1) + 2 \log \sqrt{x + 2} = 1$.
5. Доказати једнакост

$$\left(1 + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}\right) = 2 \operatorname{ctg} x.$$

6. Решити једначину $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.
7. Одредити a тако да права $ax + y - 5 = 0$ додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$.
8. Израчунати површину трапеза ако су му основице $a = 8$ и $b = 4$, а углови на већој основици 45° и 30° .
9. Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина $H = 15m$, а површина дијагоналног пресека $P = 120m^2$.
10. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{1 + 3i}{1 - i} + \frac{1}{1 + i}$.

РЕШЕЊА

1. За дате вредности a и b је $a + 1 = (2 + \sqrt{3})^{-1} + 1 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} + 1 = 2 - \sqrt{3} + 1 = 3 - \sqrt{3}$, $b + 1 = (2 - \sqrt{3})^{-1} + 1 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 1 = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + \sqrt{3}$. Сада је

$$(a + 1)^{-1} + (b + 1)^{-1} = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}}{9 - 3} = 1.$$

2. Полазну неједначину доводимо на еквивалентан облик $\frac{x^2}{x^2-1} > 0$, где је $x \neq 0$. Како је $x^2 > 0$, то је решења полазне неједначине једнак скупу решења неједначине $x^2 - 1 > 0$, одакле налазимо $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

3. Како је $2x^2 - 2x - 10 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8x^2 - 8x - 41 = 0$ и како је на основу Вијетових формула $x_1 + x_2 = -\frac{-8}{8} = 1$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{-41}{8}$, то добијамо $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 + \frac{41}{4} = \frac{45}{4}$.

4. Налазећи претходно област дефинисаности решења добијамо $x > 1$, затим користећи особине логаритамске функције имамо

$$\begin{aligned} \log(x-1) + 2\log\sqrt{x+2} &= 1 \Leftrightarrow \log(x-1) + \log(x+2) = 1 \\ \Leftrightarrow \log(x-1)(x+2) &= \log 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4 &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

5. Уз услов $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ добијамо

$$\begin{aligned} \left(1 + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) \left(1 + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x}\right) &= (1 + \operatorname{ctg} x)^2 - \frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x. \end{aligned}$$

6. Користећи познате тригонометријске трансформације добијамо

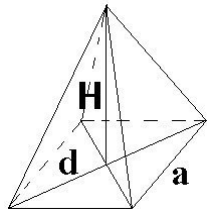
$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

7. Једначина дате праве у експлицитном облику је $y = -ax + 5$, а једначина елипсе у канонском облику је $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Услов додира за праву и елипсу у овом случају је $16a^2 + 9 = 25$, одакле добијамо да је $a = 1$ или $a = -1$. Значи, задатак има два решења и то $y = -x + 5$ и $y = x + 5$.

8. Овај задатак се решава као задатак 6. из бланкета за септембар 1 из 1991. године, а резултат је $P = 12(\sqrt{3} - 1)$.

9. Нека је a основна ивица дате пирамиде и d дијагонала квадрата основе пирамиде. Дијагонални пресек дате пирамиде је једнакокраки троугао чија је основца d а висина H (слика 18).

Како је $d = a\sqrt{2}$, то из услова да је површина дијагоналног пресека $P = 120m^2$ и $H = 15m$ добијамо $\frac{15a\sqrt{2}}{2} = 120 \Leftrightarrow a\sqrt{2} = 16 \Leftrightarrow a = 8\sqrt{2}m$. Сада је $\frac{a^2H}{3} = \frac{64 \cdot 2 \cdot 15}{3} = 640$, па је $V = 640m^3$.



Слика 18

10. Како је

$$\begin{aligned}z &= \frac{1+3i}{1-i} + \frac{1}{1+i} = \frac{(1+3i)(1+i) + 1-i}{(1-i)(1+i)} \frac{1+4i+3i^2+1-i}{1-i^2} \\ &= \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i,\end{aligned}$$

слиди да је $Re(z) = -\frac{1}{2}$, $Im(z) = \frac{3}{2}$.

Јуни, 1990.

1. Упростити израз $\frac{1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{a - b}$, $a \neq b$, $a \neq 0$.

2. За које реалне бројеве x је $\frac{x-2}{x-1} < -1$.

3. Решити једначину $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$.

4. Решити једначину $\log(x-9) + 2 \log \sqrt{2x-1} = 2$.

5. Свођењем на оштар угао $x \neq 0$ доказати да је

$$\frac{\sin(\pi+x) \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} - \frac{\sin(\pi-x) \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = 2 \sin x.$$

6. Решити једначину $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.

7. Израчунати површину ромба чија је страница $a = 2$ и оштар угао $\alpha = 30^\circ$.

8. Колика је основна ивица a правилне тростране пирамиде површине $P = 18\sqrt{3}$, ако је висина те пирамиде два пута дужа од њене основне ивице?

9. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку $M(-5,4)$ и са координатним осама образује троугао површине 5.

10. Одредити једначине правих које пролазе кроз тачку $M(5,0)$ и додирују круг $x^2 + y^2 = 9$.

РЕШЕЊА

1. Дати израз трансформисемо

$$\frac{1 - \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}}{a - b} = \frac{\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2}}{a - b} = \frac{(a - b)^2}{a^2(a - b)} = \frac{a - b}{a^2}.$$

2. Како је

$$\frac{x-2}{x-1} < -1 \Leftrightarrow \frac{x-2+x-1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} < 0,$$

то је

$$(2x - 3 > 0 \wedge x - 1 < 0) \vee (2x - 3 < 0 \wedge x - 1 > 0) \Leftrightarrow x \in (1, 3/2),$$

па полазна неједначина важи за све x које припадају интервалу $(1, \frac{3}{2})$.

3. Коришћењем еквивалентних трансформација добијамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27} &\Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \frac{4^3}{3^3} \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{4^3}{3^3} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

4. Једначина има смисла само за $x > 9$ јер мора да буде $x - 9 > 0$ и $2x - 1 > 0$. Даље је

$$\begin{aligned} \log(x - 9) + 2 \log \sqrt{2x - 1} = 2 &\Leftrightarrow \log[(x - 9)(2x - 1)] = 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 19x + 9 = 100 &\Leftrightarrow 2x^2 - 19x - 91 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1 = 13 \vee x_2 = -\frac{7}{2}, &\text{ па је решење само } x_1 = 13. \end{aligned}$$

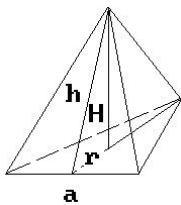
5. Полазећи од леве стране добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} - \frac{\sin(\pi - x) \cos(\frac{x - \pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} \\ = \frac{-\sin x \cdot \sin x}{-\sin x} - \frac{\sin x \sin x}{-\sin x} = 2 \sin x. \end{aligned}$$

6. Из дате једначине је $4 \sin x + 4 \cos^2 x = 1$. Даље је $-4 \sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0$. Уводимо смену $\sin x = t$ и добијамо квадратну једначину $-4t^2 + 4t + 3 = 0$. Њена решења су $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Решење $t_1 = 3$ не долази у обзир јер је $|\sin x| \leq 1$, тако да је

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

7. Ако на слици (коју због једноставности овде изостављамо) означимо висину са h и страницу ромба са a видимо да је $\frac{h}{a} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Одавде је $h = \frac{1}{2} \cdot a = 1$, с обзиром да је према услову $a = 2$, тако да је површина ромба $P = 2 \cdot 1 = 2$.



Слика 19

8. Површина пирамиде је $P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$. Како је површина дата и једнака је $P = 18\sqrt{3}$, према услову задатка $H = 2a$ апотему h лако израчунавамо (слика 19)

$$h = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{36}} = \frac{7\sqrt{3}a}{6}$$

и површину $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$. На крају је

$$18\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$$

9. Сегментни облик једначине праве је $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ па ће површина троугла између праве и координатних оса бити $P = \frac{|a \cdot b|}{2} = 5$, одакле следи $a \cdot b = \pm 10$. Пошто права пролази кроз тачку $M(-5,4)$ налазимо релацију

$$\frac{-5}{a} + \frac{4}{b} = 1 \Rightarrow -5b + 4a = ab.$$

Треба, дакле, решити два система једначина

$$\begin{cases} ab = 10 \\ -5b + 4a = ab \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ab = -10 \\ -5b + 4a = ab. \end{cases}$$

Решење првог система је $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = -5$, $b_1 = 2$, $b_2 = -4$, а одговарајуће праве $l_1 : \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ и $l_2 : \frac{x}{-5/2} + \frac{y}{4} = 1$. Други систем нема решења.

10. Права $y = kx + n$ пролази кроз тачку $M(5,0)$ и следи $0 = 5k + n$. Ова права је тангента круга $x^2 + y^2 = 9$, а како је услов додира праве и круга $r^2(k^2 + 1) = n^2$, имамо $9(k^2 + 1) = n^2$. Треба, дакле, решити систем једначина $n = -5$, $9k^2 + 9 = n^2$, а решења су $k_1 = \frac{3}{4}$, $k_2 = -\frac{3}{4}$, $n_1 = -\frac{15}{4}$, $n_2 = \frac{15}{4}$, што одређује две тангенте $t_1 : y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$ и $t_2 : y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}$.

Септембар, 1990.

1. Израчунати вредност израза $\frac{3^{-2} - (\frac{3}{4})^{-2}}{2 - (\frac{1}{5})^{-1}}$.
2. Решити неједначину $\frac{1}{x} < x$.
3. Решити једначину $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$.
4. Решити једначину $\log x + \log(x + 3) = 1$.
5. Израчунати површину троугла ABC ако је $c - b = 1$, $h_c = 2$ и угао $\alpha = 30^\circ$.
6. Израчунати запремину праве кружне купе чији је осни пресек једнако-гранични троугао, а полупречник основе $r = 3$.
7. Решити једначину $\sin 2x - \sin x = 0$.
8. Доказати да за сваки оштар угао x важи

$$\cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку пресека правих $x + 4y - 1 = 0$ и $5x + 6y + 1 = 0$ и ортогонална је са правом $x - 4y + 7 = 0$.
10. Одредити једначину круга који додирује обе координатне осе, а центар лежи на правој $x + y - 4 = 0$.

РЕШЕЊА

1. Примењујемо основне особине степена $\frac{3^{-2} - (\frac{3}{4})^{-2}}{2 - (\frac{1}{5})^{-1}} = \frac{\frac{1}{9} - \frac{16}{9}}{2 - 5} = \frac{5}{9}$.

	-1	0	1
$1-x$	+	+	+
x	-	-	+
$1+x$	-	+	+
$\frac{(1-x)(1+x)}{x}$	+	-	-

2. Дата неједначина је еквивалентна неједначини

$$\frac{1-x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} < 0.$$

Решење тражимо помћу табеле одакле следи $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

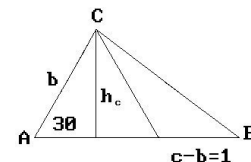
3. Очигледно је $\sqrt[3]{16} = \sqrt{4^x} \Leftrightarrow 4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.

4. Једначина има смисла за $x > 0$. Тада је

$$\begin{aligned} \log x + \log(x+3) = 1 &\Rightarrow \log x(x+3) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x = 10 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

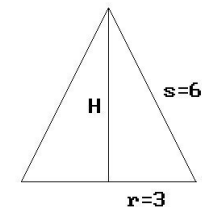
и то је решење једначине јер друго решење квадратне једначине $x = -5$ не задовољава услов $x > 0$.

5. Према услову задатка са слике 20 видимо да је $\frac{h_c}{b} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4$, затим је $c-b = 1 \Rightarrow c = 5$, па је површина троугла $P = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$.



Слика 20

6. Попречни пресек купе је дат на слици 21. Према елементима који су дати имамо



Слика 21

7. Примењујући адициону формулу за синус двоструког угла дату једначину добијамо

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

8. Полазећи од леве стране добијамо

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x &= \cos^4 x + \cos^2 x(1 - \cos^2 x) + \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \cos^4 x + \cos^2 x - \cos^4 x + \sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

9. Координате пресечне тачке се добија као решење система једначина $x - 3y + 2 = 0$, $5x + 6y - 4 = 0$, одакле налазимо да је $x = -\frac{5}{7}$ и $y = \frac{3}{7}$, тј. пресечна тачка је $P(-\frac{5}{7}, \frac{3}{7})$. Коефицијент правца праве ортогоналне са правом $x - 4y + 7 = 0$ је $k_1 = -4$. Тражена права је $y - \frac{3}{7} = -4(x + \frac{5}{7})$ односно $y = -4x - \frac{17}{7}$.

10. Координате центра круга одређујемо као пресек правих $x + y - 4 = 0$ и $y = x$, па налазимо $O_1(2, 2)$. Према услову задатка лако уочавамо да је $p = q = 2$ и $r = 2$, те је тражена једначина круга $K_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Јуни, 1991.

1. Израчунати $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{2-\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}+5}$.
2. Наћи $x, y \in \mathbb{R}$ тако да је $(4+3i)x - (2-i)y - 10i = 0$.
3. Број 21 раставити на два сабирка тако да збир њихових квадрата буде 261.
4. Решити једначину $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$.
5. Решити неједначину $\log_2(x+1) + \log_2(x^{-1}) > 1$.
6. Решити једначину $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 0$.
7. Ако је $\operatorname{tg} x = \frac{n}{n+1}$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{2n+1}$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, одредити $x + y$.
8. Одрдити једначину кружнице која је концентрична са кружницом $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ и пролази кроз тачку $M(1, -4)$.
9. Када се омотач купе развије у равни добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину купе.
10. Бројеви 3, $x_1, x_2, x_3, x_4, 13$ су узастопни чланови аритметичког низа. Одредити непознате x_1, x_2, x_3, x_4 .

РЕШЕЊА

1. Рационалишући сваки од именилаца добијамо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{2-\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}+5} \\ &= \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{3(\sqrt{3}+2)}{3-4} + \frac{15(2+\sqrt{3})}{4-3}\right) \frac{1}{\sqrt{3}+5} \\ &= (\sqrt{3}+1 - 3\sqrt{3} - 6 + 30 + 15\sqrt{3}) \frac{1}{\sqrt{3}+5} \\ &= \frac{13\sqrt{3}+25}{\sqrt{3}+5} = \frac{(13\sqrt{3}+25)(\sqrt{3}-5)}{-22} \\ &= -\frac{39+25\sqrt{3}-65\sqrt{3}-125}{22} = \frac{20\sqrt{3}+43}{11}. \end{aligned}$$

2. Комплексни бројеви су једнаки ако и само ако су им једнаки одговарајући реални и имагинарни део. Сада је

$$\begin{aligned} & (4+3i)x - (2-i)y - 10i = 0 \\ \Leftrightarrow & 4x - 2y + (3x+y-10)i = 0 \\ \Leftrightarrow & 4x - 2y = 0 \wedge 3x+y-10 = 0 \\ \Leftrightarrow & y = 2x \wedge x = 2 \Leftrightarrow y = 4 \wedge x = 2. \end{aligned}$$

3. Ако тражене бројеве означимо са x и y , тада је $x + y = 21$, $x^2 + y^2 = 261$, одакле лако добијамо бројеве 6 и 15.

4. Користећи основна својства степена добијамо

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x \cdot 2^x = 2 \cdot 2^{2x} \mid : 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

Увођењем смене $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ добијамо једначину $t^2 + t - 2 = 0$, а њена решења су $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$. Како мора бити $t > 0$, из $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ следи $x = 0$.

5. Неједначина има смисла за $x > 0$ па је

$$\begin{aligned} \log_2(x+1) + \log_2(x^{-1}) > 1 &\Leftrightarrow \log_2 \frac{x+1}{x} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 2 &\Leftrightarrow \frac{-x+1}{x} > 0. \end{aligned}$$

Због $x > 0$ следи $-x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$, па је дата неједначина тачна за $x \in (0, 1)$.

6. Свођењем на двоструки угао добијамо

$$\begin{aligned} \cos 4x + 2 \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - \sin^2 2x + 2 \cos 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x + 1 + \cos 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2x(1 + 2 \cos 2x) &= 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee \cos 2x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \vee x = k\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = k\pi - \frac{\pi}{3}, &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

7. Према адиционој формули за тангенс збира и условима задатка имамо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{n}{n+1}, \operatorname{tg} y = \frac{1}{2n+1}, \\ \operatorname{tg}(x+y) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2n+1}} = 1, \end{aligned}$$

одакле је $x + y = \frac{\pi}{4}$.

8. За дату кружницу је $p = -3, q = -1$, па је њена једначина $(x+3)^2 + (y+1)^2 = r^2$. Из услова да кружница пролази кроз тачку $M(1, -4)$ следи

$$r = \sqrt{(1+3)^2 + (-4+1)^2} = 5.$$

Једначина тражене кружнице је $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$.

9. Према услову задатка је $M = \frac{1}{4}P$, а површина круга $P = (4\sqrt{5})^2 = 80\pi$. Површина омотача је $M = \pi r s$, $s = 4\sqrt{5}$, па је $M = \pi r 4\sqrt{5} = 20\pi$. Дакле, полупречник основе је $r = \sqrt{5}$. Висина је $H = \sqrt{s^2 - r^2} = 5\sqrt{3}$, па је запремина купе $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{25\sqrt{3}\pi}{3}$.

10. Бројеви $3, x_1, x_2, x_3, x_4, 13$ чине аритметичку прогресију па важи

$$\begin{aligned}x_1 &= 3 + d, & x_2 &= 3 + 2d, & x_3 &= 3 + 3d, \\x_4 &= 3 + 4d, & 13 &= 3 + 5d.\end{aligned}$$

Из последње једнакости је $d = 2$, па је $x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 9, x_4 = 11$.

Септембар 1, 1991.

1. Израчунати $\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$.
2. Одредити реалне бројеве x и y ако је $\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$.
3. За које вредности реалног параметра m график функције $y = x^2 + m(m+1)x + 100$ додирује x -осу?
4. Решити једначину $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = \log(2x+3)$.
5. Решити једначину $3^x \cdot 5^{x-1} = 45$.
6. Основице трапеза су 5 и 3, а углови при већој основици су 30° и 45° . Израчунати његову површину.
7. Израчунати површину и запремину четворостране једнакоивичне пирамиде ивице a .
8. Доказати једнакост $\frac{1 + \sin 2t}{\sin t + \cos t} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$ за $t \neq k\pi + \frac{3\pi}{4}$.
9. Решити једначину $\sin 2x - \cos x = 0$.
10. Одредити једначину праве која пролази кроз тачку пресека правих $x - 3y + 2 = 0$ и $5x + 6y - 4 = 0$ и паралелна је са правом $4x + y + 7 = 0$.

РЕШЕЊА

1. Према особинама корена

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2 &= 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})} + 6 + 2\sqrt{5} \\ &= 12 - 2\sqrt{36 - 20} = 12 - 8 = 4.\end{aligned}$$

2. На основу дефиниције и особина комплексног броја најпре поједностављујемо израз на левој страни, и добијамо

$$\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = \frac{(x-2)(1+i)}{2} + \frac{(x-2)(1-i)}{2},$$

чиме се полазна једначина тако своди на једначину $x + y - 5 + (x - y + 1)i = 2 - 6i$, одакле решавајући систем $x + y - 5 = 2 \wedge x - y + 1 = -6$, налазимо $x = 0$ и $y = 7$.

3. Да би график дате функције додиривао x -осу потребно је и довољно да јој x -оса, тј. права $y = 0$, буде тангента. Ово значи да једначина $x^2 + m(m + 1)x + 100 = 0$ мора имати само једно решење, односно да њена дискриминанта D мора бити једнака нули. Како је $D = (m(m + 1))^2 - 400$, из $D = 0$ добијамо $(m(m + 1))^2 = 400 \Leftrightarrow m(m + 1) = 20 \vee m(m + 1) = -20$. У првом случају добијамо једначину $m^2 + m - 20 = 0$ и њена решења су бројеви 4 и -5. У другом случају једначина нема реалних решења јер је њена дискриминанта мања од нуле. Дакле, график дате функције додирује x -осу за $m \in \{4, -5\}$.

4. Дата једначина је дефинисана за $x > 1$. Под овим условом је

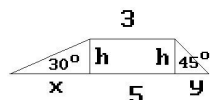
$$\begin{aligned} \log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 &= \log(2x + 3) \Leftrightarrow \log \frac{x(x-1)}{2x+3} = \log 2 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2x+3} &= 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 4x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6. \end{aligned}$$

Решење једначине $x^2 - 5x - 6 = 0$ је и број -1 , али није и решење дате једначине јер, како смо закључили, мора да буде $x > 1$.

5. Према особинама степена имамо

$$3^x \cdot 5^{x-1} = 45 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 15^x = 45 \Leftrightarrow 15^x = 15^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

6. Према ознакама на слици 22 закључујемо $x = h \operatorname{ctg} 30^\circ = h\sqrt{3}$, $y = h$ и $x + y = 2$. Даље је $h\sqrt{3} + h = 2$, одакле следи $h = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$, тј. $h = \sqrt{3} - 1$. Сада је $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{5+3}{2}(\sqrt{3} - 1) = 4(\sqrt{3} - 1)$.



Слика 22

7. Подножје O висине H дате пирамиде полови дијагоналу d базиса пирамиде (слика 23). Означимо са h висину бочне стране пирамиде (једнакостраничног троугла), па је

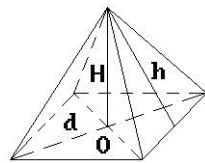
$$d = a\sqrt{2}, \quad H = \sqrt{a^2 - (d/2)^2} = \sqrt{a^2 - a^2/2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

и даље

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(\sqrt{3} + 1), \quad V = \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

8. Тригонометријским трансформацијама добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin 2t}{\sin t + \cos t} &= \frac{\sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t}{\sin t + \cos t} = \sin t + \cos t \\ &= \sin t + \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right). \end{aligned}$$



Слика 23

9. Трансформацијом полазне једначине на еквивалентан облик налазимо

$$\begin{aligned}\sin 2x - \cos x = 0 &\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

10. Пресек датих правих налазимо решавањем система једначина $x - 3y + 2 = 0$ и $5x + 6y - 4 = 0$. На тај начин добијамо да је $A(0, 2/3)$ пресечна тачка датих правих.

Права чија је једначина $4x + y + 7 = 0$ има коефицијент правца $m = -4$, па права кроз A паралелна са овом правом има једначину $y - 2/3 = -4(x - 0)$, тј. $12x + 3y - 2 = 0$.

Септембар 2, 1991.

1. Решити једначину $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
2. Доказати једнакост $\left(1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = 2 \operatorname{tg} x$.
3. Решити систем једначина $x^2 + y^2 = 29$, $x + y = 7$.
4. Решити једначину $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 2) = 2$.
5. Решити неједначину $4^x > 2^{\frac{x+1}{x}}$.
6. Решити неједначину $\frac{2x - 3}{3x - 2} < 0$.
7. Упростити израз $\sqrt{\frac{a - 1}{a^2 + a + 1}} \cdot \sqrt{a^3 - 1}$.
8. Одредити једначину праве која на ординатној оси одсеца одсечак $n = 2$ и додирује кружницу $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
9. Основна ивица правилне шестостране призме износи 3 cm , а дијагонала бочне стране 6 cm . Израчунати запремину призме.
10. Одредити реални и имагинарни део комплексног израза $\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ за $z = 1 + i$.

РЕШЕЊА

1. Из $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ следи $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ па добијамо

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \vee \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x_k = 2k\pi \vee x_m = \frac{\pi}{3} + 4m\pi \vee x_n = \frac{5\pi}{3} + 4n\pi, k, m, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2. Полазећи од леве стране имамо

$$\begin{aligned} & \left(1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right) = 1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \\ & = \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

3. Из друге једначине је $x = 7 - y$ па сменом у првој добијамо $(7 - y)^2 + y^2 = 29$, односно квадратну једначину $y^2 - 7y + 10 = 0$. Њена решења су $y_1 = 5$, $y_2 = 2$ и одговарајућа $x_1 = 2$, $x_2 = 5$.

4. Једнчина има смисла ако је $x > 1$. Даље је

$$\begin{aligned} \log_2(x - 1) + \log_2(x + 2) = 2 & \Leftrightarrow \log_2(x - 1)(x + 2) = 2 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 4 & \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -3. \end{aligned}$$

Због почетног услова $x > 1$ следи да је $x = 2$ тражено решење.

5. На основу особина степена налазимо

$$\begin{aligned} 4^x > 2^{\frac{x+1}{x}} & \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{\frac{x+1}{x}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x^2-x-1}{x}} > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-1}{x} > 0 & \Leftrightarrow \frac{2(x-1)(x+1/2)}{x} > 0, \text{ одакле је} \\ \left(\frac{x-1}{x} > 0 \wedge x > -1/2\right) \vee & \left(\frac{x-1}{x} < 0 \wedge x < -1/2\right) \\ \Leftrightarrow (x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \wedge & x > -1/2) \vee (x \in (0, 1) \wedge x < -1/2) \\ \Leftrightarrow x \in (-1/2, 0) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

Дакле, дата неједначина је тачна за $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, +\infty)$.

6. Дата неједначина је тачна за $2x - 3 > 0$, $3x - 2 < 0$ или $2x - 3 < 0$, $3x - 2 > 0$, одакле лако следи решење $x \in (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$.

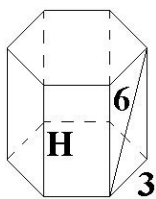
7. Користећи особине корена добијамо

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a-1}{a^2+a+1}} \cdot \sqrt{a^3-1} = \sqrt{\frac{a-1}{a^2+a+1}} \cdot (a-1)(a^2+a+1) \\ & = \sqrt{(a-1)^2} = |a-1|. \end{aligned}$$

8. Једначина кружнице је $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$, а тражене праве $y = kx + 2$. Услов додира праве и кружнице је $r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$, где су p и q координате центра кружнице. Тачка $M(0, 2)$ припада кругу, дакле задатак има само једно решење. Сада је

$$10(k^2 + 1) = (3k - 1 + 2) \implies k^2 - 6k + 9 = 0 \implies k = 3.$$

Дакле, тражена тангента је $y = 3x + 2$.



Слика 24

одакле следи $Re\left(\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) = 0$, $Im\left(\frac{z-\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right) = \frac{2}{3}$.

9. Запремина призме је $V = B \cdot H = \frac{1}{2}3\sqrt{3}a^2H = \frac{1}{2}27\sqrt{3}H$, а према услову задатка (види слику 24) је $H = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. Дакле, $V = \frac{1}{2}27\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{243}{2}$.

10. Према дефиницији коњуговано-комплексног броја налазимо

$$\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}} = \frac{1 + i - (1 - i)}{1 + (1 + i)(1 - i)} = \frac{2i}{3},$$

Јуни, 1992.

- Упростити израз $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} + \frac{x+1}{x^2 + x + 1}$.
- Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.
- Решити систем једначина $\begin{cases} \log x - \log y = 2 \\ \log x \cdot \log y = 3 \end{cases}$.
- Испитати да ли је тачна једнакост $1 + \frac{1}{i} = \frac{2i}{i-1}$, при чему је $i = \sqrt{-1}$.
- Решити неједначину $\frac{1}{2x-5} > 1$.
- Решити једначину $\sin 2x - \cos x = 0$.
- Израчунати површину правоугаоника уписаног у елипсу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, при чему две супротне странице правоугаоника садрже жиге елипсе.
- Одредити дужину просторне дијагонале D зарубљене правилне четворостране пирамиде ако је дато: $B_1 = 4$, $B_2 = 1$, $V = 7$.

РЕШЕЊА

1. Ако именилац у дргом сабирку раставимо као разлику кубова и доведемо све изразе на заједнички именилац добићемо

$$\frac{2x(x^2 + x + 1) - 3x^2 - 2x - 1 + (x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x^3 - 2}{x^3 - 1} = 2.$$

2. Примењујући особине степена дату једначину доводимо на облик $2^{2\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$. Уводећи смену $2^{\sqrt{x-2}} = t$, где t мора да буде веће од нуле, добијамо квадратну једначину $t^2 - 10t + 16 = 0$ чија су решења $t_1 = 8$ и $t_2 = 2$. Одатле налазимо

$$\begin{aligned} 2^{\sqrt{x-2}} = 8 &\Rightarrow x - 2 = 9 \Rightarrow x_1 = 11, \\ 2^{\sqrt{x-2}} = 2 &\Rightarrow x - 2 = 1 \Rightarrow x_2 = 3, \end{aligned}$$

што су сва решења полазне једначине.

3. Из прве једначине система је $\log x = 2 + \log y$ и смењујући то у другој једначини налазимо

$$(\log y)^2 + 2 \log y - 3 = 0 \Rightarrow \log y = 1 \vee \log y = -3.$$

Значи, имамо два решења $y_1 = 10$ и $y_2 = 10^{-3}$, а решења за x су

$$\log x = 2 + 1 \Rightarrow x_1 = 10^3, \quad \log x = -1 \Rightarrow x_2 = 10^{-1}.$$

4. Полазимо од леве стране и користимо основне особине комплексних бројева

$$1 + \frac{1}{i} = \frac{1+i}{i} = \frac{i+1}{i} \cdot \frac{i(i-1)}{i(i-1)} = \frac{-2i}{-1(i-1)} = \frac{2i}{i-1}$$

чиме показујемо да је наведена једнакост тачна.

5. Додавањем левој и десној страни дате неједнакости -1 , потом довођењем добијеног израза на левој страни на исти именилац, долазимо до еквивалентне неједначине

$$\frac{1-2x+5}{2x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{6-2x}{2x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{2x-5} > 0,$$

чије је решење

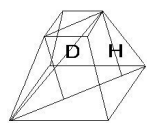
$$(3-x > 0 \wedge 2x-5 > 0) \vee (3-x < 0 \wedge 2x-5 < 0) \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3.$$

Дакле, решења неједначине сви реални бројеви који припадају интервалу $(\frac{5}{2}, 3)$.

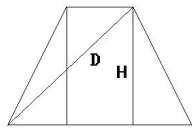
6. Користећи адициону формулу за синус двоструког угла једначину доводимо на облик

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 0 \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in Z.$$

7. Из једначине елипсе налазимо $a^2 = 16$, $b^2 = 12$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$. Жике елипсе су $F_1(2, 0)$ и $F_2(-2, 0)$. С обзиром да супротне странице садрже жике елипсе, налазимо из једначине елипсе да је за $x = 2$ вредност $y = \pm 3$, што значи да су дужине страница правоугаоника 6 и 4. Површина правоугаоника је $P = 6 \cdot 4 = 24$.



Слика 25



8. Према условима задатка и једна и друга база зарубљене пирамиде су квадрати, па из $B_1 = 4$ следи $a_1 = 2$, из $B_2 = 1$ следи $a_2 = 1$. Запремина зарубљене пирамиде је $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$ па имамо $7 = \frac{H}{3}(4 + 2 + 1) = \frac{H}{3} \cdot 7 \Rightarrow \frac{H}{3} = 1 \Rightarrow H = 3$. Попречни дијагонални пресек је једнакокраки трапез, а његова дијагонала је у

ствари дијагонала дате зарубљене пирамиде. Са слике 25 видимо да је

$$D^2 = H^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{27}{2} \Rightarrow D = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Септембар 1, 1992.

1. Израчунати вредност бројног израза

$$25^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + 1000^{\frac{1}{3}}.$$

2. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{1-i}{2+3i}$.
3. Решити једначину $21 \cdot 3^x - 5^{x+2} = 9 \cdot 3^{x+2} - 5^{x+3}$.
4. Решити тригонометријску једначину $\cos x - \cos 2x = 1$.
5. Решити неједначину $\frac{x-1}{x-2} < \frac{x-3}{x-5}$.
6. Решити систем једначина $x^2 + 3y^2 = 3$, $x - y - 1 = 0$.
7. Дата је права $x + 2y - 2 = 0$ и тачка $M(4,4)$. Одредити координате пројекције тачке M на дату праву.
8. Одредити запремину зарубљене правилне троугране пирамиде чије су основне ивице $a = 9$, $b = 3$, а бочна ивица је 5.

РЕШЕЊА

1. Применом основних својстава степена лако израчунавамо

$$25^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} + 1000^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} - 9 + 10 = \frac{6}{5}.$$

2. Дати комплексни број доводимо на облик $x + iy$:

$$z = \frac{1-i}{2+3i} = \frac{(1-i)(2-3i)}{4+9} = \frac{2-2i-3i-3}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

и закључујемо да је $Re z = -\frac{1}{13}$ и $Im z = -\frac{5}{13}$.

3. После преуређења једначина постаје

$$21 \cdot 3^x + 25 \cdot 5^x = 81 \cdot 3^x - 125 \cdot 5^x \Leftrightarrow 100 \cdot 5^x = 60 \cdot 3^x,$$

одакле је $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \Rightarrow x = -1$.

4. После примене адиционе формуле за косинус двоструког угла почетна једначина постаје

$$\begin{aligned} \cos x - \cos^2 + \sin^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x - 2\cos^2 x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\cos x) &= 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2\cos x = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x &= \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

5. Познатим трансформацијама добијамо

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-5) - (x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-1}{(x-2)(x-5)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x-5)} > 0.$$

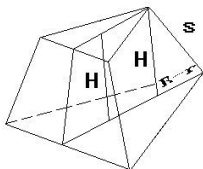
Последњу неједначину решавамо помоћу следеће табеле, и њено решење је $x \in (-1, 2) \cup (5, +\infty)$.

	-1	2	5	
$x+1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-5$	-	-	-	+
$\frac{x+1}{(x-2)(x-5)}$	-	+	-	+

6. Из друге једначине система је $x = y + 1$ и ово смењујемо у другој једначини. Тако добијамо квадратну једначину $y^2 + y - 1 = 0$ чија су решења $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Потом налазимо $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = 0$.

7. Дату праву доводимо на облик $y = -\frac{1}{2}x + 1$ и кроз тачку $M(4, 4)$ постављамо праву упарвну на њу. Њена једначина је $y - 4 = 2(x - 4)$, то јест $y = 2x - 4$. Координате пројекције M' тачке M која се налази на правој $y = -\frac{1}{2}x + 1$ добијамо решавањем система једначина $y = -\frac{1}{2}x + 1$, $y = 2x - 4$, па је $M'(2, 0)$.

8. Запремина зарубљене пирамиде је $V = \frac{H}{3}(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$, а с обзиром да је у питању правилна тространа зарубљена пирамида, тада су већа и мања основа једнакостранични троуглови. Њихови полупречници описаних кружни-ца су редом $R_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $R_2 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$.



Слика 26

Поставимо раван која садржи једну бочну ивицу и нормална је на раван основе (видети слику 26). У тако добијеном пресеку уочимо трапез чије су основнице управо полупречници R_1 и R_2 , један крак је бочна ивица а други крак висина зарубљене пирамиде. Закључујемо да је

$$H^2 = s^2 - (R_1 - R_2)^2 = 25 - \left[\frac{(9-3)\sqrt{3}}{3} \right]^2 = 13.$$

Даље израчунавамо површине основа

$$B_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{81\sqrt{3}}{4}, \quad B_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

па налазимо $V = \frac{\sqrt{13}}{3} \left(\frac{81\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{81 \cdot 9 \cdot 3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{39\sqrt{39}}{4}$.

Септембар 2, 1992.

1. Извршити назначене операције у изразу

$$\left(\frac{3a^{-1}x^2}{5b^{-2}y^3} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{10ax^{-3}}{9by^{-2}} \right)^{-3}.$$

2. Доказати идентитет

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

3. Решити једначину

$$\log 3 + \frac{1}{2} \log 4 + \log(5x - 1) = \log(x + 2) + \log 2^3.$$

4. Решити систем једначина $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$, $x + y = 5$.

5. Решити једначину $\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$.

6. Одредити реални и магинарни део комплексног броја $\frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}}$, где је $z = 1 + i$.

7. Дате су тачке $A(3, -1)$, $B(11, 7)$ и $C(1, 2)$. Одредити једначину праве p која садржи тачку C и нормална је на праву одређену тачкама A и B .

8. У зарубљеној правој кружној купи познати су полупречници база $R = 9$ и $r = 3$ и нагиб изводнице према доњој основи $\alpha = 30^\circ$. Израчунати запремину.

РЕШЕЊА

1. Примењујући особине степена налазимо

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a^{-1}x^2}{5b^{-2}y^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{10ax^{-3}}{9by^{-2}}\right)^{-3} &= \frac{3a^{-2}a^2x^{-4}}{5^{-2}b^4y^{-6}} \cdot \frac{10^{-3}a^{-3}x^9}{9^{-3}b^{-3}y^6} \\ &= \frac{3^4x^5}{5 \cdot 2^3ab} = \frac{81x^5}{40ab} \end{aligned}$$

2. У доказу полазимо од леве стране

$$\begin{aligned} &\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{-\cos^2 \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1\right)}{\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} = \frac{-(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}. \end{aligned}$$

3. Знајући област дефинисаности логаритамске функције, лако налазимо да решење мора да задовоља услов $x > \frac{1}{5}$. Служећи се познатим операцијама везаним за логаритме, добијамо

$$\begin{aligned} \log[3 \cdot 2 \cdot (5x - 1)] &= \log 2^3(x + 2) \Leftrightarrow \log \frac{6(5x - 1)}{8(x + 2)} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(5x - 1)}{4(x + 2)} &= 1 \Leftrightarrow 15x - 3 = 4x + 8 \Leftrightarrow 11x = 11 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

4. Из друге једначине налазимо да је $x = 5 - y$. После смене у првој једначини и уз услов $y \neq 0$, $x \neq 5$, добијамо

$$\frac{1}{5-y} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{y+5-y}{y(5-y)} = \frac{5}{6} \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0.$$

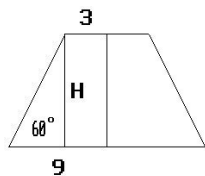
Одавде је $y_1 = 3$, $y_2 = 2$ односно $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

5. На основу релације $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ дата једначина постаје

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(1 - \cos^2 x) + \cos x &= 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos^2 x + \cos x + \sqrt{2} = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in Z. \end{aligned}$$

6. Примењујући операцију коњуговања комплексног броја, дати израз за $z = 1 + i$ постаје $\frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}} = \frac{1 + i - 1 + i}{1 + (1 + i)(1 - i)} = \frac{2i}{3}$, одакле је $Re \frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}} = 0$ и $Im \frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}} = \frac{2}{3}$.

7. Права кроз тачке A и B има једначину $y + 1 = x - 3$, то јест, $y = x - 4$, а права ортогонална са њом која пролази кроз тачку C има једначину $y - 2 = -1 \cdot (x - 1)$, односно $y = -x + 3$.



Слика 27

8. На слици 27 дат је попречни пресек праве зарубљене купе, па с обзиром на дате елементе налазимо

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{H}{R-r} \Rightarrow \frac{H}{6} = \sqrt{3} \Rightarrow H = 6\sqrt{3}.$$

Запремина праве зарубљене купе је $V = \frac{H\pi}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ тако да је $V = \frac{6\sqrt{3}\pi}{3}(9^2 + 9 \cdot 3 + 3^2) = 234\sqrt{3}\pi$.

Јуни, 1993.

1. Израчунати $\left(\left(-\frac{27}{8} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{81}{16} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{3}{2} \right)^{-2} \right)^{-\frac{3}{5}}$.
2. Решити неједначину $2 \log x > \log^2 x$.
3. Решити једначину $5^x - 5^{3-x} = 20$.
4. Решити једначину $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
5. Из жиже хиперболе $9x^2 - 16y^2 = 144$ конструисана је нормала на асимптоту. Израчунати површину ограничену овом нормалом, асимптотом и апсцисом.
6. Осни пресек праве купе полупречника основе r је једнакостранични троугао. На ком растојању од врха треба поставити раван паралелно основи купе која полови њену запремину.

7. Наћи бројеве x и y тако да је $\frac{x-2}{1-i} + \frac{y-3}{1+i} = 1 - 3i$.

РЕШЕЊА

1. Према познатим особинама степена добијамо

$$\begin{aligned} \left(\left(-\frac{27}{8} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{81}{16} \right)^{\frac{3}{4}} \left(-\frac{3}{2} \right)^{-2} \right)^{-\frac{3}{5}} &= \left(\left(-\frac{3}{2} \right)^{3(-\frac{1}{3})} \left(\frac{3}{2} \right)^{4(\frac{3}{4})} \left(-\frac{3}{2} \right)^{-2} \right)^{-\frac{3}{5}} \\ &= \left(-\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{5}} = (-1)^{-\frac{3}{5}} = -1. \end{aligned}$$

2. Како логаритам постоји за $x > 0$ добијамо

$$\begin{aligned} 2 \log x > \log^2 x &\Leftrightarrow \log x(2 - \log x) > 0 \Leftrightarrow \\ (\log x > 0 \wedge \log x < 2) \vee (\log x < 0 \wedge \log x > 2) &\Leftrightarrow \\ (x \in (1, +\infty) \cap (0, 100)) \cup (x \in (0, 1) \cap (100, +\infty)) & \\ \Leftrightarrow x \in (1, 100). & \end{aligned}$$

3. Користећи особине степена, за дату једначину је

$$5^x - 5^{3-x} = 20 \Leftrightarrow 5^x - \frac{5^3}{5^x} = 20 \Leftrightarrow 5^{2x} - 20 \cdot 5^x - 125 = 0.$$

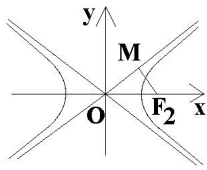
Уведимо смену $5^x = t$, тада претходна једначина добија облик $t^2 - 20t - 125 = 0$, а решења су јој $t_1 = 25$ и $t_2 = -5$. С обзиром да је $t > 0$ друго решење не долази у обзир. Сада је $5^x = 25$ односно $x = 2$.

4. Према формули за косинус двоструког угла добијамо

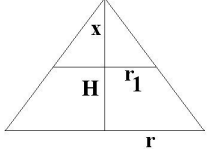
$$\begin{aligned} \sin \frac{x}{2} + \cos x = 1 &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} (2 \sin \frac{x}{2} - 1) = 0 &\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \vee \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, & \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_m = \frac{\pi}{3} + 4m\pi, m \in \mathbb{Z}, & \\ \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_n = \frac{5\pi}{3} + 4n\pi, n \in \mathbb{Z}. & \end{aligned}$$

5. Како је $9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, следи да је $a = 4$, $b = 3$, $e = \sqrt{16+9} = 5$. Жиже хиперболе су $F_1(-5, 0)$ и $F_2(5, 0)$, а асимптоте праве $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{4}x$.

Нормала на асимптоту $y = \frac{3}{4}x$ кроз тачку $F_2(5, 0)$ има једначину $y = -\frac{4}{3}(x - 5)$. Тачка пресека асимптоте и нормале је $M(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$. Површина таженог троугла је $P = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6$ (слика 28).



Слика 28



Слика 29

6. Запремина праве купе чији је осни пресек једнакостранични троугао је $V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{6}$, а запремина нове

купе је $V_1 = \frac{\pi r_1^2 \cdot x}{3}$. Из осног пресека (слика 29), на основу сличности одговарајућих троуглова, следи пропорционалност $\frac{x}{H} = \frac{r_1}{r}$, то јест, $\frac{x}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{r_1}{r}$, па је $x = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1$.

Сада имамо: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r_1^3}{r^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2r_1^3 - r^3 = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{r}{\sqrt[3]{2}}$.

Дакле, $x = \frac{r\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$.

7. Користећи особине комплексних бројева добијамо

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{1-i} = \frac{y-3}{1+i} &= \frac{(x-2)(1+i) + (y-3)(1-i)}{2} \\ &= \frac{(x+y-2-3) + (x-y-2+3)i}{2} \\ &= \frac{(x+y-5)}{2} + \frac{(x-y+1)}{2}i. \end{aligned}$$

Одавде је:

$$\frac{(x+y-5)}{2} = 1 \wedge \frac{(x-y+1)}{2} = -3 \Leftrightarrow x+y=7 \wedge x-y=-7,$$

односно $x=0$ и $y=7$.

Септембар, 1993.

1. Извршити назначене операције

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2}}} \sqrt{x - \frac{1}{x}}.$$

2. Решити једначину $4\sqrt{x-2} + 16 = 10 \cdot 2\sqrt{x-2}$.

3. Доказати идентитет

$$\frac{\cos^2(270^\circ - t)}{1} + \frac{\sin^2(270^\circ + t)}{1} = 1.$$

$$\frac{1}{\sin^2(90^\circ + t)} - 1 = \frac{1}{\cos^2(90^\circ - t)} - 1$$

4. Решити једначину $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.

5. Решити неједначину $\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$.

6. Написати једначину кружнице која пролази кроз тачке $A(-1, -3)$ и $B(3, -3)$, а центар припада правој $p : x - y = 0$.
7. Дата је коса четворострана призма чије су основе квадрати странице a , а бочне ивице су такође дужине a . Једно теме горње основе налази се изнад пресека дијагонала доње основе. Израчунати запремину V призме.

РЕШЕЊА

1. С обзиром на особине корена имамо

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2}}} \sqrt{x - \frac{1}{x}} =$$

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{x^4}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = |x|.$$

2. Увођењем смене $2^{\sqrt{x-2}} = t$ добијамо квадратну једначину $t^2 - 10t + 16 = 0$, чија су решења $t_1 = 8$ и $t_2 = 2$. Сада је

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2^3 \Leftrightarrow x_1 - 2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 11$$

и

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2 \Leftrightarrow x_2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 3.$$

3. Очигледно је

$$\frac{\cos^2(270^\circ - t)}{\frac{1}{\sin^2(90^\circ + t)} - 1} + \frac{\sin^2(270^\circ + t)}{\frac{1}{\cos^2(90^\circ - t)} - 1}$$

$$= \frac{\sin^2 t}{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} + \frac{\cos^2 t}{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} = \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{1 - \cos^2 t} + \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{1 - \sin^2 t} =$$

$$\frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^2 t} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

4. Једноставним тригонометријским трансформацијама добијамо

$$\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \sin x + 4 \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos^2 x - \sin^2 x + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3 \sin^2 x - \sin^2 x + 4 \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin^2 x + 4 \sin x + 3 = 0.$$

Увођењем смене $\sin x = t$ последња једначина добија облик $-4t^2 + 4t + 3 = 0$, а решења су јој $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{3}{2}$. За $t_1 = -\frac{1}{2}$ је

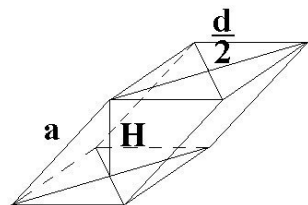
$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_n = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \vee x_m = \frac{11\pi}{6} + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z},$$

док за t_2 једначина нема решења јер је $t_2 > 1$.

5. За дату једначину је

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 5x + 6) < 0 &\Leftrightarrow 0 < x^2 - 5x + 6 < 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \wedge x^2 - 5x + 5 < 0 \\ \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty) \wedge x \in \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 2\right) \cup \left(3, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

6. Из услова да дата кружница садржи тачке A и B , једначина кружнице $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ даје систем једначина по p , q и r : $(-1 - p)^2 + (-3 - q)^2 = r^2$, $(3 - p)^2 + (-3 - q)^2 = r^2$. Пошто центар $C(p, q)$ припада датој правој, то важи $p - q = 0$ односно $p = q$. Решавањем система добијамо $p = q = 1$, $r = 2\sqrt{5}$, па једначина кружнице гласи



Слика 30

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20.$$

7. Из услова задатка, коришћењем ознака са слике 30, добијамо

$$\begin{aligned} V = B \cdot H = a^2 \cdot H, \quad \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ H^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}, \quad H = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Запремина је $V = a^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Јуни, 1994.

1. Израчунати вредност израза

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}}\right) (\sqrt{3}+5)^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Решити једначину $2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}$.

3. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$.

4. Доказати идентитет

$$\frac{\sqrt{1 - 2 \sin x \cos x}}{\sin^2 x - \cos^2 x} + \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = \sin x + \cos x.$$

5. Решити једначину $\sin x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$.
6. На правој $x = -5$ одредити тачку подједнако удаљену од леве жиже елипсе $x^2 + 5y^2 = 20$ и темена које припада позитивном делу ординатне осе.
7. Основа праве призме је једнакокраки троугао чија основица има дужину a , а угао при основици је α . Наћи запремину призме ако је површина њеног омотача једнака збиру површина њених основа.

РЕШЕЊА

1. Рационалишући сваки именилац добијамо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) (\sqrt{3}+5)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - \frac{3(\sqrt{3}+2)}{1} + \frac{15(3+\sqrt{3})}{6} \right) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}+5}} \\ &= \frac{5+\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+5}}{\sqrt{3}+5} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+5}}{2}. \end{aligned}$$

2. Користећи особине степена добијамо

$$\begin{aligned} 2^{x-1} - 2^{x-3} &= 3^{x-2} - 3^{x-3} \Leftrightarrow 2^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = 3^x \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{27} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{8}} = \left(\frac{2}{3} \right)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^4 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

3. Логаритамска функција је дефинисана само за позитивне вредности, па добијамо

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 3) &\geq -3 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 4x + 3 \leq 8 \Leftrightarrow \\ x^2 - 4x + 3 &> 0 \wedge x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \\ x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \wedge x &\in [-1, 5] \Leftrightarrow \\ x \in [-1, 1) \cup (3, 5] \end{aligned}$$

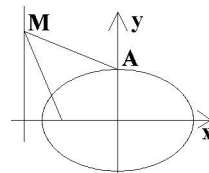
4. Полазећи од леве стране имамо

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1-2\sin x \cos x}}{\sin^2 x - \cos^2 x} + \frac{2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \\ &= \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^2} + 2\sin x \cos x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(1 + 2\sin x \cos x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\ &= \frac{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)} = \sin x + \cos x. \end{aligned}$$

5. Задатак је исти као 4. задатак у септембарском року 1993.

6. Из једначине елипсе $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ следи $a = 2\sqrt{5}$, $b = 2$ и $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4$. Лева жижа је $F(-4, 0)$. Теме које припада позитивном делу ординатне осе је $A(0, 2)$ (слика 31). Сада је

$$\begin{aligned} d(M, A) = d(M, F) &\Leftrightarrow \sqrt{(-5)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(-5+4)^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2 - y^2 = 1 - 25 \Rightarrow y = 7. \end{aligned}$$

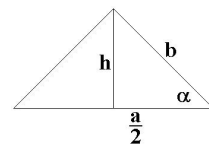


Тражена тачка је $M(-5, 7)$.

7. Запремина је $V = B \cdot H$. Из услова задатка, коришћењем ознака са слике 32 добијамо

$$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{односно} \quad \frac{a}{2} = \frac{b}{\cos \alpha} \Leftrightarrow b = \frac{a}{2 \cos \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следи, } B &= \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4}, M = (a + 2b)H = \left(a + \frac{a}{\cos \alpha}\right)H = \\ \frac{aH(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha} &= aH \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \text{ и} \end{aligned}$$



$$M = 2B \Leftrightarrow aH \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2} \Rightarrow$$

$$H = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \sin \alpha}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

$$V = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a^3}{8} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Слика 32

Септембар, 1994.

1. Одредити вредност израза $\frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{14}}{125^6}$.

2. Дата је квадратна једначина

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(1 - 3a)x + 8 = 0, \quad (a \in \mathbb{Z} \wedge a \neq \pm 1).$$

Одредити a тако да корени једначине буду једнаки.

3. Решити неједначину $\log_2 \frac{x-1}{x+1} < 1$.

4. Решити једначину $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$.

5. Израчунати вредност израза $\frac{\cos x}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\sin x}{1 - \operatorname{ctg} x}$, ако је $\sin x = 0,6$ и $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

6. Одредити дужину тетиве коју одсеца права $3x + y + 2 = 0$ на кружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
7. Израчунати r и H праве кружне купе чија је запремина $V = 9\pi\sqrt{3}$, а површина омотача M је два пута већа од површине базе.

РЕШЕЊА

1. Користећи познате особине степеновања лако израчунавамо

$$\frac{(-5)^{-4} \cdot 25^{14}}{125^6} = \frac{5^{-4} \cdot 5^{28}}{5^{18}} = 5^6.$$

2. Корени квадратне једначине ће бити једнаки ако је дискриминанта једнака нули. Дакле,

$$D = 4(1 - 3a)^2 - 32(a^2 - 1) = 4(a^2 - 6a + 9) = 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 0,$$

па је $a = 3$.

3. Дату неједначину трансформисемо у двоструку узимајући у обзир област дефинисаности и основна својства логаритамске функције:

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{x-1}{x+1} < 1 &\Leftrightarrow 0 < \frac{x-1}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \wedge \frac{x-1}{x+1} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} > 0 \wedge \frac{x+3}{x+1} > 0 \\ \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \wedge x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty). \end{aligned}$$

4. Једначину доводимо на еквивалентан облик

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x &= \frac{64}{27} \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \frac{2^6}{3^3} \\ \Rightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} &= \left(\frac{2^2}{3}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Rightarrow x = 3. \end{aligned}$$

5. Ако је $\sin x = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ вредности осталих функција су

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{4}{3},$$

а тражена вредност израза је

$$\frac{\cos x}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{4}{3}} = 5.$$

6. Координате пресечних тачака праве и кружнице се добијају као решење система једначина

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \\ 3x + y + 2 = 0, \end{cases}$$

па су пресечне тачке $A(2, -8)$ и $B(-1, 1)$. Дужина тетиве је

$$d(\overline{AB}) = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+8)^2} = 3\sqrt{10}.$$

7. Запремина праве кружне купе је $V = \frac{\pi r^2 H}{3} = 9\pi\sqrt{3}$, па је је $r^2 H = 27\sqrt{3}$. Из $M = 2B$ следи $\pi r s = 2\pi r^2 \Rightarrow s = 2r$. Даље је $s^2 = r^2 + H^2 \Rightarrow 4r^2 = r^2 + H^2 \Rightarrow H = r\sqrt{3}$. Налазимо да је $r = 3$ и $H = 3\sqrt{3}$.

Јуни, 1995.

1. Решити неједначину $\frac{x+2}{x-1} < 2$.
2. Решити једначину $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$.
3. Решити једначину $\log x + \log(x-3) = 2\log(6-x)$.
4. Решити једначину $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$.
5. Одредити параметар m да права $y = mx + 1$ додирује елипсу $3x^2 + 4y^2 = 2$.
6. Изводница праве кружне купе $s = 20cm$ заклапа са равни основе угао 30° . Наћи површину и запремину купе.

РЕШЕЊА

1. Очигледно је

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} < 2 &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x-1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow (4-x > 0 \wedge x-1 < 0) \vee (4-x < 0 \wedge x-1 > 0) \\ &\Leftrightarrow (x < 4 \wedge x < 1) \vee (x > 4 \wedge x > 1) \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty). \end{aligned}$$

2. Помоћу познатих тригонометријских трансформација добијамо

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x + \sqrt{3}\cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} &\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = k\pi - \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. За $x \in (3, 6)$ дата једначина има смисла па је

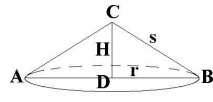
$$\begin{aligned} \log x + \log(x-3) &= 2\log(6-x) \\ \Leftrightarrow \log(x(x-3)) &= \log(6-x)^2 \Leftrightarrow x(x-3) = (6-x)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x &= 36 - 12x + x^2 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

4. Како је $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$, то сменом $3^x = t$ добијамо квадратну једначину $t^2 - 3t + 2 = 0$ чија су решења $t = 1$ или $t = 2$. Сада из $3^x = 1$ следи $x = 0$, а из $3^x = 2$ следи $x = \log_3 2$ и то су решења дате једначине.

5. Канонски облик једначине дате елипсе је $\frac{x^2}{2/3} + \frac{y^2}{1/2} = 1$. Коефицијент m правца тражене праве одредићемо из услова додира праве и елипсе који у овом случају добија облик $\frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{2} = 1$. Одавде је $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Дакле, задатак има два решења и то су праве $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$ и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1$.

6. Осни пресек задате купе је једнокраки троугао ABC чији је крак $s = 20\text{cm}$ и угао на основици 30° (слика 33). Нека је D подножје висине из темена C на основицу AB , H висина купе и r полупречник основе купе.



Слика 33

Сада закључујемо да је $H = s \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$, $r =$

$s \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$, па је $P = r\pi(r + s) = 10\pi\sqrt{3}(10\sqrt{3} +$

$20) = 100\pi\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$, $V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{3000\pi}{3} = 1000\pi$.

Септембар 1, 1995.

1. Решити једначину $3 \cdot 2^{-1/x} \cdot 3^{1/x} + 2 \cdot 3^{-1/x} \cdot 2^{1/x} - 5 = 0$.
2. Одредити сва решења једначине $\sin x - \cos 2x + 1 = 0$.
3. За коју вредност реалног броја x важи једнакост

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

4. Од свих правих које су паралелне са правом $x + y = 0$ одредити оне које додирују елипсу $x^2 + 4y^2 = 20$.
5. Збир дијагонала ромба је 14cm , а мања дијагонала износи $\frac{3}{4}$ веће. Израчунати страницу ромба и полупречник уписане кружнице.

РЕШЕЊА

1. Како је

$$3 \cdot 2^{-1/x} \cdot 3^{1/x} + 2 \cdot 3^{-1/x} \cdot 2^{1/x} - 5 = 0 \Leftrightarrow 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} - 5 = 0,$$

то сменом $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = t$ добијамо једначину $3t + \frac{2}{t} - 5 = 0$, то јест једначину $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Њена решења су $t_1 = \frac{2}{3}$ и $t_2 = 1$. За t_1 је

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Пошто не постоји $x \in \mathbb{R}$ за који је $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/x} = 1$ (јер би онда морало бити $\frac{1}{x} = 0$ што је немогуће), следи да је $x = -1$ једино решење дате једначине.

2. Користећи формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ добијамо

$$\begin{aligned} \sin x - \cos 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \sin x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = k\pi \vee x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \vee x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3. Једначина има смисла за $x > 0$ и тада је

$$\begin{aligned} \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 &\Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 x = 7 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x = 7 &\Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16. \end{aligned}$$

4. Једначина елипсе у каноничком облику је $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, а једначине свих правих паралелних датој правој $y = -x + n$, $n \in \mathbb{R}$. Како је $a^2 = 20$, $b^2 = 5$, коефицијент правца $m = -1$, то из услова додира праве и елипсе добијамо једначину $n^2 = 25$, чија су решења $n_1 = 5$ и $n_2 = -5$. Дакле, тражене тангенте су $t_1: x + y + 5 = 0$ и $t_2: x + y - 5 = 0$.

5. Нека је a страница ромба, d_1 дужина веће дијагонале, d_2 дужина мање дијагонале, h његова висина и r полуречник уписане кружнице. Из датих претпоставки следи $d_1 d_2 = 14$, $d_2 = \frac{3}{4} d_1$, одакле добијамо $d_1 = 8$, $d_2 = 6$.

Како се дијагонале ромба секу под правим углом и међусобно полове, то из правоуглог троугла OAB (види слику 2 у решењу 2. задатка из септембра 1977. године) израчунавамо да је $a = 5$. Како је пошршина ромба $ah = \frac{d_1 d_2}{2}$, следи $h = 21$. Даље је $10r = 24$, односно $r = 2,4$.

Септембар 2, 1995.

1. Решити једначину $3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0$.
2. Решити једначину $\log_{1/2} x - \log_{1/2}(x-1) = \log_{1/2}(x+1)$.
3. Решити једначину $\cos x - \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$.
4. Одредити обим једнакокраког трапеза ако му је површина $P = 100\text{cm}^2$ и полупречник уписаног круга $r = 2,5\text{cm}$.
5. Тачка $M(4,4)$ припада параболи $y^2 = 2px$. Одредити n у једначини праве $y = \frac{x}{3} + n$ тако да права буде тангента дате параболе

РЕШЕЊА

1. Како је

$$3\sqrt[3]{81} - 10\sqrt[3]{9} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(9^{1/x})^2 - 10 \cdot 9^{1/x} + 3 = 0,$$

то сменом $9^{1/x} = t$ дату једначину сводимо на једначину $3t^2 - 10t + 3 = 0$. Њена решења су $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = 3$. Сада је

$$\begin{aligned} 9^{1/x} &= \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2/x} = 3^{-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -2, \\ 9^{1/x} &= 3 \Leftrightarrow 3^{2/x} = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 2, \end{aligned}$$

и то су решења дате једначине.

2. С обзиром на основна правила логаритмовања, из почетне једначине имамо

$$\begin{aligned} \log_{1/2} x - \log_{1/2}(x-1) &= \log_{1/2}(x+1) \\ \Leftrightarrow \log_{1/2} \frac{x}{(x-1)} &= \log_{1/2}(x+1) \wedge x > 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{(x-1)} &= x+1 \wedge x > 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \wedge x > 1 \\ \Leftrightarrow \left(x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \wedge x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) &\wedge x > 1, \end{aligned}$$

па је тражено решење x_1 , јер x_2 није веће од 1.

3. Познатим тригонометријским трансформацијама добијамо

$$\begin{aligned} \cos x - \cos \frac{x}{2} + 1 &= 0 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} &= 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = 0 \vee \cos \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \vee \frac{x}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \vee \frac{x}{2} &= 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi \vee x = \frac{2\pi(6k-1)}{3} \vee x = \frac{2\pi(6k+1)}{3}, &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. Означимо са a и b паралелне стране трапеца, а са c његов крак. Истакнимо да је збир двеју несуседних страна ма ког четвороугла у који се може уписати круг једнак збиру других двеју несуседних страна. Отуда за стране a, b, c датог трапеца важи $a + b = 2c$.

Како је за дати трапез $h = 2r = 5 \text{ cm}$, где је h висина трапеца, онда из формуле за израчунавање површине трапеца добијамо да је $\frac{a+b}{2} \cdot 5 = 100$, то

јест $a + b = 40$. Одавде, коришћењем једнакости $a + b = 2c$, добијамо да је обим датог трапеза $O = a + b + 2c = 2 \cdot 40 = 80$.

5. Како тачка $M(4, 4)$ припада параболи $y^2 = 2px$, то је $8p = 16$, односно $p = 2$. Параметар n одредићемо из услова додира дате праве и параболе, то јест из једначине $2tn = p$, при чему је коефицијент правца праве $m = \frac{1}{3}$. Сада из једначине $\frac{2}{3}n = 2$ добијамо $n = 3$.

Јуни, 1996.

1. Наћи вредност израза $\left(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}\right)^2$.
2. Решити једначину $4^{\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0$.
3. Решити тригонометријску једначину $\cos x - \cos 2x = 1$.
4. Наћи x из: $\log 3 + \frac{1}{2} \log 4 + \log(5x - 1) = \log(x + 2) + \log 2^3$.
5. Дата је права $x + 2y - 2 = 0$ и тачка $M(4, 4)$. Одредити координате тачке која је нормална пројекција тачке M на дату праву.
6. Када се омотч купе развије у равни добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Израчунати запремину купе.

РЕШЕЊА

1. Овај задатак је исти као у року септембар 1 из 1991. године.
2. Како је $4^{\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0 \Leftrightarrow \left(2^{\sqrt{x-2}}\right)^2 - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0$, то сменом $2^{\sqrt{x-2}} = t$ из дате једначине добијамо једначину $t^2 - 10t + 16 = 0$, чија су решења $t = 8$ или $t = 2$.
За $t = 8$ следи

$$2^{\sqrt{x-2}} = 8 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x-2}} = 2^3 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 11.$$

За $t = 2$ је

$$2^{\sqrt{x-2}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

3. Из $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ следи

$$\begin{aligned} \cos x - \cos 2x = 1 &\Leftrightarrow \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1) \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \vee x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \vee x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4. Приметимо најпре да дата једначина има смисла за $x \in (\frac{1}{5}, +\infty)$. Сада, применом правила за логаритмовање, из дате једначине добијамо:

$$\begin{aligned}\log 3 + \log 2 + \log(5x - 1) &= \log(x + 2) + \log 8 \Leftrightarrow \\ \log 6(5x - 1) &= \log 8(x + 2) \Leftrightarrow 30x - 6 = 8x + 16 \Leftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

Како је $1 \in (\frac{1}{5}, +\infty)$, следи да је $x = 1$ решење дате једначине.

5. Задатак је исти као 7. задатак из септембра 1, 1992. године.

6. Означимо са s изводницу купе и са r полупречник њеног базиса. Из услова задатка добијамо

$$r\pi s = \frac{1}{4}s^2\pi \Leftrightarrow r = \frac{s}{4} \Leftrightarrow r = \sqrt{5}.$$

Како је $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{80 - 5} = 5\sqrt{3}$, онда је $V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{25\sqrt{3}}{3}\pi$.

Јуни, 1997.

1. Решити неједначину $\frac{3}{x-1} \leq x+1$.
2. Решити једначину $4^{x-\sqrt{x^2-2}} - \frac{3}{2} \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-2}} = 1$.
3. Решити једначину $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$.
4. Одредити сва решења једначине $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.
5. Дуж AB , $A(4, 2)$, $B(-6, -4)$ је хипотенуза правоуглог троугла ABC коме једна катета лежи на правој $y = \frac{1}{2}x - 1$. Одредити координате темења C .
6. Одредити површину и запремину зарубљене купе ако је $r_1 = 8 \text{ cm}$, $r_2 = 3 \text{ cm}$ и $H = 12 \text{ cm}$.

РЕШЕЊА

1. Полазну неједначину доводимо најпре на еквивалентан облик $\frac{3}{x-1} - x - 1 \leq 0$ или $\frac{4-x^2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2-x)(x+2)}{x-1} \leq 0$, а тада помоћу табеле закључујемо да је неједначина задовољена за $x \in [-2, 1) \cup [2, +\infty)$.

	-2	1	2	
$2-x$	+	+	+	-
$x+2$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$\frac{(2-x)(x+2)}{x-1}$	+	-	+	-

2. Увођењем смене $2^{x-\sqrt{x^2-2}} = t$ дата једначина добија облик $t^2 - \frac{3}{2}t - 1 = 0$, то јест $2t^2 - 3t - 2 = 0$, а њена решења су $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. За $t_1 = 2$ добијамо $2^{x-\sqrt{x^2-2}} = 2 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-2} = 1 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x^2-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \wedge x-1 > 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \wedge x > 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. За $t_2 = -\frac{1}{2}$ дата једначина нема решење јер је $2^{x-\sqrt{x^2-2}} > 0$.

3. Приметимо најпре да је дата једначина дефинисана за $x \in (1, 2) \cup (2, +\infty)$. Коришћењем особина логаритама добијамо

$$\begin{aligned} \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4 &\Leftrightarrow 1 + \log_2(x-1) = 2 \log_{x-1} 2 \Leftrightarrow \\ 1 + \log_2(x-1) &= \frac{2}{\log_2(x-1)} \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \wedge t = \log_2(x-1). \end{aligned}$$

Квадратна једначина има решења $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. За $t_1 = -2$ добијамо

$$\log_2(x-1) = -2 \Leftrightarrow x-1 = 2^{-2} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4},$$

а за $t_2 = 1$ добијамо

$$\log_2(x-1) = 1 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

4. Познатим трансформацијама добијамо

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \\ \Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x &= 2 \sin x(1 + \cos x) \\ \Leftrightarrow 1 + \cos x - 2 \sin x(1 + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - 2 \sin x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x \neq -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, &k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

5. Теме B припада правој $y = \frac{1}{2}x - 1$. Теме C правоуглог троугла ABC биће пресек дате праве и праве која је нормална на дату праву и пролази кроз теме A . Дакле, једначина праве на којој лежи катета AC је $y - 2 = -2(x - 4)$, то јест $y = -2x + 10$. Координате темена C су $x = \frac{22}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ и добијене су решавањем система једначина $y = -2x + 10$, $y = \frac{1}{2}x - 1$.

6. Коришћењем познатих формула добијамо

$$\begin{aligned} P &= \pi(r_1^2 + r_2^2 + s(r_1 + r_2)) = \pi(64 + 9 + 13 \cdot 11) = 216\pi, \\ V &= \frac{1}{3}\pi H(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{125}{3}(64 + 9 + 24) = 388\pi, \end{aligned}$$

при чему је $s = \sqrt{H^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$.

Септембар 1, 1997.

1. Колика је вредност израза $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ ако је $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$?
2. Решити неједначину $\frac{4x+5}{x^2+x+1} > 1$.

3. Решити једначину $\sqrt{\log_2 x} - \log_2(8x) + 5 = 0$.
4. Доказати да за сваки $x \neq (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ важи једнакост $\frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos x + 1} = 2 \cos x - 1$.
5. Одредити једначину кружнице чији је центар тачка $C(2, 5)$ и која споља додирује кружницу $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$.
6. Израчунати површину једнакокраког трапеза чија дијагонала $d = 16 \text{ cm}$ захвата прав угао са краком трапеза $c = 12 \text{ cm}$.

РЕШЕЊА

1. Најпре је $a = (2 + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$, $b = (2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, па је

$$(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1} = (3 - \sqrt{3})^{-1} + (3 + \sqrt{3})^{-1}$$

$$\frac{1}{3 - \sqrt{3}} + \frac{1}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}}{6} = 1.$$

2. Приметимо да је $x^2 + x + 1 > 0$ за сваки $x \in \mathbb{R}$. Зато је

$$\frac{4x + 5}{x^2 + x + 1} > 1 \Leftrightarrow 4x + 5 > x^2 + x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) < 0.$$

Последња неједначина је могућа за $x - 4 > 0$, $x + 1 < 0$ или $x - 4 < 0$, $x + 1 > 0$. Прва могућност даје $x > 4$, $x < -1$, па пресека нема. Из друге могућности следи $x < 4$, $x > -1$, па је дата неједначина тачна за $x \in (-1, 4)$.

3. Дата једначина има смисла ако је $\log_2 x \geq 0$, то јест ако је $x \geq 1$. У том случају је

$$\sqrt{\log_2 x} - \log_2(8x) + 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} - \log_2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} = \log_2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 4 \wedge \log_2 x > 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 = 0 \wedge \log_2 x > 2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \wedge t = \log_2 x > 2$$

$$\Leftrightarrow (t = 4 \vee t = 1) \wedge t > 2 \Leftrightarrow t = 4 = \log_2 x \Leftrightarrow x = 16.$$

4. Под датим условима је

$$\frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos x + 1} = \frac{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 1}{2 \cos x + 1} = \frac{4 \cos^2 x - 1}{2 \cos x + 1}$$

$$= \frac{(2 \cos x - 1)(2 \cos x + 1)}{2 \cos x + 1} = 2 \cos x - 1.$$

5. Означимо са r полупречник дате кружнице и са C_1 њен центар, тада из

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

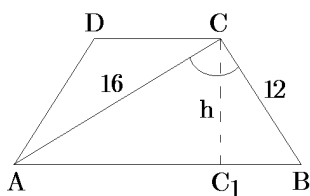
слиди да је $C_1(-2, 1)$, $r = \sqrt{2}$. Задатак има два решења. Тражени полупречници су:

$$r_1 = C_1C - r = \sqrt{4^2 + 4^2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \quad r_2 = C_1C + r = 5\sqrt{2}.$$

Решења су $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 18$ и $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 50$.

6. Из правоуглог троугла ABC (види слику 34) добијамо основицу трапеза $ABCD$ и она је $a = AB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$. Површина троугла ABC је $\frac{ah}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2}$, одакле слиди да је висина трапеза $h = \frac{4 \cdot 12}{5}$.

Даље, из правоуглог троугла CC_1B добијамо да



Слика 34

је

$$x^2 = C_1B^2 = 20^2 - \frac{4^2 \cdot 12^2}{5^2} = \frac{12^2(5^2 - 4^2)}{5^2} = \frac{12^2 \cdot 3^2}{5^2},$$

то јест $x = \frac{3 \cdot 12}{5}$. Јасно је $b = a - 2x = 20 - \frac{24 \cdot 3}{5} = \frac{28}{5}$,

па је коначно $P = \frac{a+b}{2}h = 152,88$.

Септембар 2, 1997.

- Скратити разломак $\frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$, а затим израчунати његову вредност за $x = 2^{1/2} - 1$.
- Решити неједначину $|2x - 3| < x$.
- Решити једначину $\frac{9 \sin x - 3 \cos x}{2 \sin x + \cos x} = 2$.
- Решити логаритамску једначину $\log_x 64 - \log_2 x = 1$.
- Одредити једначину кружне линије са центром у тачки $C(1, 0)$ која са унутрашње стране додирује кружну линију $x^2 + y^2 - 4x = 0$.
- Нека је F тачка на страници AD квадрата $ABCD$. У тачки C конструисана је нормала на FC која сече праву AB у тачки E . Израчунати дужину дужи BE ако се зна да површина квадрата $ABCD$ износи 256 и површина троугла CEF износи 200.

РЕШЕЊА

1. Нуле квадратног тринома $3x^2 - 7x + 2$ су 2 и $\frac{1}{3}$, а тринома $2x^2 - 5x + 2$ су 2 и $\frac{1}{2}$. Сада, знајући да је $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где су x_1, x_2 нуле тринома $ax^2 + bx + c$ добијамо да је

$$I(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{3(x-2)(x-\frac{1}{3})}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})} = \frac{3x-1}{2x-1},$$

$$I(\sqrt{2}-1) = \frac{3(\sqrt{2}-1)-1}{2(\sqrt{2}-1)-1} = \frac{3\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}-3} = \frac{(3\sqrt{2}-4)(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2})^2-3^2}$$

$$= -(12+9\sqrt{2}-8\sqrt{2}-12) = -\sqrt{2}.$$

2. По дефиницији апсолутне вредности реалног броја је

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & x \in [\frac{3}{2}, +\infty) \\ 3-2x, & x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \end{cases}.$$

Отуда на интервалу $[\frac{3}{2}, +\infty)$ је $|2x-3| < x \Leftrightarrow 2x-3 < x \Leftrightarrow x < 3$, а на интервалу $(-\infty, \frac{3}{2})$ је $|2x-3| < x \Leftrightarrow 3-2x < x \Leftrightarrow x > 1$. Закључујемо да је решење неједначине $|2x-3| < x$ интервал $(1, 3)$.

3. Једноставно добијамо да је

$$\frac{9 \sin x - 3 \cos x}{2 \sin x + \cos x} = 2 \Leftrightarrow 9 \sin x - 3 \cos x = 4 \sin x + 2 \cos x$$

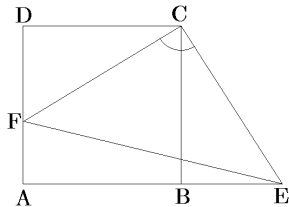
$$\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Приметимо најпре да једначина има смисла за $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Сада, користећи познате трансформације логаритама добијамо $\log_x 64 - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_x 2^6 - \log_2 x = 1$ односно $6 \log_x 2 - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 x} - \log_2 x = 1$. Множећи са $\log_2 x$ и уводећи смену $\log_2 x = t$, добијамо квадратну једначину $t^2 + t - 6 = 0$, чија су решења $t = 2$ и $t = -3$. За $t = 2$ из $\log_2 x = 2$ следи $x = 4$, а за $t = -3$ из $\log_2 x = -3$ следи $x = \frac{1}{8}$. Дакле, решења дате једначине су бројеви 4 и $\frac{1}{8}$.

5. Како је $x^2 + y^2 - 4x = 0$ еквивалентно са $(x-2)^2 + y^2 = 4$, то је центар дате кружнице $C(2, 0)$ а полупречник $r_1 = 2$. Полупречник r тражене кружнице добијамо из услова да се она са задатом кружницом додирује са унутрашње стране, то јест из услова

$$\overline{CC_1} = r_1 - r \Leftrightarrow r = r_1 - \overline{CC_1} \Leftrightarrow r = 2 - 1 \Leftrightarrow r = 1.$$

Једначина тражене кружнице је $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



Слика 35

6. Једноставно се доказује да су троуглови DFC и BEC подударни (види слику 35), одакле закључујемо да је троугао CEF једнакокраки и правоугли. Из површине троугла CEF добијамо $\overline{CE} = \sqrt{2 \cdot 200} = 20$. Како је $CB = \sqrt{256} = 16$ то из троугла BEF добијамо $BE = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$.

Јуни, 1998.

1. Упростити израз

$$\left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right) : \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right).$$

2. Решити неједначину $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1$.

3. Решити једначину $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

4. Решити једначину $\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}$.

5. За хиперболу $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{11} = 1$ одредити тангенту која је ортогонална са правом $y = \frac{x}{2}$.

6. Базис тростране пирамиде је троугао чији је обим једнак 60, а странице a, b, c задовољавају релацију $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13}$. Израчунати површину и запремину пирамиде ако јој је висина $H = 6$, а подножје се поклапа са центром уписане кружнице базиса.

РЕШЕЊА

1. Користећи правила за операције са рационалним изразима добијамо:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \right) : \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{a+b+c}{a(b+c)} \cdot \frac{a(b+c)}{(b+c-a)} \cdot \frac{2bc}{(b+c)^2 - a^2} \\ &= \frac{a+b+c}{b+c-a} \cdot \frac{2bc}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{2bc}{(b+c-a)^2}. \end{aligned}$$

2. Полазну неједначину доводимо најпре на еквивалентан облик $\frac{2+x+10-5x}{4-x^2} -$

$1 < 0$, одакле је $\frac{x^2 - 4x + 8}{4 - x^2} < 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 < 0$, јер је $x^2 - 4x + 8 > 0$ за сваки $x \in \mathbb{R}$. Сада је $(2-x)(2+x) < 0$. Решавањем ове неједначине добијамо да је она задовољена за $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

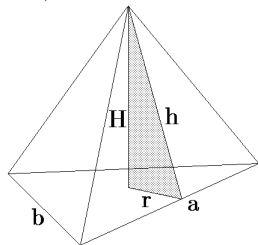
3. Дата једначина дефинисана је за сваки $x \in \mathbb{R}$ и еквивалентна је једначини $\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_2 4(3^{x-1} + 1)$, одакле добијамо експоненцијалну једначину $9^{x-1} + 7 = 4(3^{x-1} + 1)$. Сменом $3^{x-1} = t$ дату једначину сводимо на квадратну $t^2 - 4t + 3 = 0$, чија су решења $t = 3$ и $t = 1$. За $t = 3$ добијамо $3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, а за $t = 1$ добијамо $3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

4. Извлачењем заједничког чиниоца на левој страни једначине и коришћењем формула за синус и косинус двоструког угла добијамо:

$$\begin{aligned}\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = 1 \\ \Leftrightarrow -2 \sin 2x \cos 2x &= 1 \Leftrightarrow \sin 4x = -1 \\ \Leftrightarrow 4x &= 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

5. Једначина свих правих нормалних на праву $y = \frac{x}{2}$ је $y = -2x + n$. Параметар $n \in \mathbb{R}$ одређујемо из услова додира праве и хиперболе који гласи $a^2 k^2 - b^2 = n^2$, при чему је он у нашем случају $15 \cdot 4 - 11 = n^2$. Дакле, $n = \pm 7$ па су тражене тангенте $t_1 : y = -2x - 7$, $t_2 : y = -2x + 7$.

6. Како се подножје висине дате пирамиде поклапа са центром уписане кружнице базиса (слика 36), то закључијемо да су висине бочних страна пирамиде једнаке. Из услова $\frac{a}{5} = \frac{b}{12} = \frac{c}{13}$ и $a + b + c = 60$ добијамо $a = 5t, b = 12t, c = 13t$ и $30t = 60$, одакле је $t = 2$, па је $a = 10, b = 24, c = 26$.



Слика 36

Помоћу Хероновог обрасца добијамо површину базиса $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30 \cdot 20 \cdot 6 \cdot 4} = 120$, јер је $s = \frac{a+b+c}{2} = 30$. Како је површина базиса и $B = rs$, где је r полупречник уписане кружнице у базис то је $r = \frac{B}{s} = \frac{120}{30} = 4$. Сада је висина бочне стране пирамиде (види слику) $h = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{36 + 16} = 2\sqrt{13}$, па коначно добијамо $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 6 = 240$ и $P = B + \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{ch}{2} = B + sh = 120 + 60\sqrt{3} = 60(2 + \sqrt{3})$.

Септембар, 1998.

1. Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) (\sqrt{3}+5)^{-1}.$$

2. Решити једначину $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

3. Решити неједначину $\frac{1-x}{x} \leq \frac{2-x}{x-1}$.

4. Одредити сва решења једначине $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Наћи једначину кружне линије која додирује обе координатне осе и споља додирује кружну линију $x^2 + y^2 - 26x + 2y + 145 = 0$.

6. Основне ивице правилне тростране зарубљене пирамиде су $a = 18\text{cm}$ и $b = 6\text{cm}$, а бочна ивица заклапа са равни веће основе угао $\alpha = 60^\circ$. Одредити запремину те пирамиде.

РЕШЕЊА

1. Задатак је исти као на пријемном испиту јуна 1991. године.
2. Задатак је исти као трећи задатак на пријемном испиту јуна 1998.
3. Како је

$$\frac{1-x}{x} \leq \frac{2-x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} - \frac{2-x}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \geq 1) \vee (x \leq 0 \wedge x \leq 1) \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty),$$

то је решење неједначине сваки број из уније $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

4. Елементарним трансформацијама добијамо

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. Како је $x^2 + y^2 - 26x + 2y + 145 = 0 \Leftrightarrow (x-13)^2 + (y+1)^2 = 25$, то дата кружница има центар $C(13, -1)$ и полупречник $r_1 = 5$. Дакле, она се налази у првом и четвртном квадранту координатног система, па у тим квадрантима тражимо решења која, због задатих услова, гласе: $k_1: (x-p)^2 + (y-p)^2 = p^2$ и $k_2: (x-p)^2 + (y+p)^2 = p^2, p > 0$. Параметар p за кружницу k_1 налазимо из услова

$$\overline{C_1C} = p + 5 \Leftrightarrow (p-13)^2 + (p+1)^2 = (p+5)^2, \quad C_1(p, p)$$

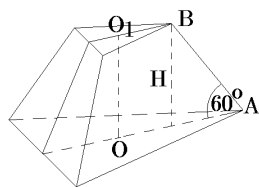
$$\Leftrightarrow p^2 - 34p + 145 = 0 \Leftrightarrow p = 5 \vee p = 29.$$

Дакле, у првом квадранту налазимо кружнице $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ и $(x-29)^2 + (y-29)^2 = 29^2$. Слично, параметар p за кружнице у четвртном квадранту налазимо из услова:

$$\overline{C_1C} = p + 5 \Leftrightarrow (p-13)^2 + (-p+1)^2 = (p+5)^2, \quad C_1(p, -p)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 38p + 145 = 0 \Leftrightarrow p = 19 - 6\sqrt{6} \vee p = 19 + 6\sqrt{6}$$

Отуда и у четвртном квадранту постоје два решења $(x-19+6\sqrt{6})^2 + (y+19-6\sqrt{6})^2 = (19-6\sqrt{6})^2$ и $(x-19-6\sqrt{6})^2 + (y+19+6\sqrt{6})^2 = (19+6\sqrt{6})^2$.



Слика 37

6. Из троугла BB_1A је (слика 37)

$$H = \overline{B_1A} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = (\overline{OA} - \overline{O_1B})\sqrt{3} = \left(\frac{2}{3}h - \frac{2}{3}h_1\right)\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} = a - b = 12,$$

па је запремина пирамиде једнака

$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1) = 4 \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= (a^2 + ab + b^2)\sqrt{3} = 768\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Јули, 2000.

1. У изразу $\left(\frac{5x^{-5}}{2y^{-2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{y^{-1}}{5x^{-1}}\right)^{-3} : \frac{10y^{-3}}{x^{-2}}$ извршити назначене операције, а затим израчунати његову вредност за $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[4]{2}$.
2. Одредити реалан број m тако да једначина $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ има реална решења.
3. Решити једначину $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.
4. Без употребе таблице доказати $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$.
5. Одредити праву l која на апсцисној оси одсеца одсечак $m = 6$ и додирује кружницу $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
6. Основе једнакокраког трапеза су $a = 10\text{cm}$ и $b = 6\text{cm}$, а крак са већом основицом заклапа угао од $\alpha = 60^\circ$. Трапез ротира око праве нормалне на основе која садржи једно теме веће основе. Наћи површину насталог тела.

Јуни, 2001.

1. Одредити све вредности x за које се може скратити разломак

$$\frac{|x-1| + |x| + x}{3x^2 - 4x + 1},$$

и скратити га у том случају.

2. Решити неједначину $\frac{1}{2^{2x} + 3} \geq \frac{1}{2^{x+2} - 1}$.
3. Решити систем $\log_y x + \log_x y = 2$, $x^2 + y = 12$.
4. Наћи $\sin 18^\circ$, користећи једнакост $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$.
5. Написати једначину елипсе $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ако су једначине њених тангената $4x + 5y - 25 = 0$ и $9x + 20y - 75 = 0$.
6. У правилној четвоространој пирамиди, основне ивице $a = 10\text{cm}$ и бочне ивице $b = 13\text{cm}$, уписана је лопта. Израчунати површину и запремину ове лопте.

Јули, 2002.

1. Упростити израз

$$\left(\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3} - 2x^{-1/3}} - \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} - x^{1/3}} \right)^{-1} - \left(\frac{1 - 2x}{3x - 2} \right)^{-1}.$$

2. Решити неједначину $\frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$.

3. Решити једначину $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$.

4. Решити једначину

$$1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0.$$

5. У тачки $A(1, y)$, $y < 0$, параболе $y^2 = 16x$ повучене су тангента и нормала на ту параболу. Израчунати површину троугла ограниченог тангентом, нормалом и x -осом.

6. Израчунати запремину праве зарубљене купе ако су дате њена изводница $s = 15\text{cm}$, површина $P = 440\pi\text{cm}^2$ и полупречник веће основе $R = 13\text{cm}$.

Јули, 2003.

1. Упростити израз

$$\left[\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)^{-1} \right] : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}.$$

2. Решити неједначину $|x^2 - x| + x > 1$.

3. Решити једначину $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

4. Решити једначину $2 \cos^2 x + \cos 4x = 0$.

5. Написати једначину круга који садржи тачке $M(0, -1)$ и $N(2, -3)$, а центар се налази на кругу $x^2 + y^2 = 9$.

6. Дијагонале једнакокраког трапеза су узајамно нормалне. Израчунати његову површину ако је крак $c = 2\sqrt{5}$, а однос основица $1 : 3$.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

30. juni, 2004. godine, prvi upisni rok školske 2004/2005 godine

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	------

1. Ako je $a \in R$ i $|a| \neq 2$, vrednost izraza $\left(\frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}\right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}$ je:
- (A) $\frac{a+1}{a-2}$; (B) $\frac{a-1}{a-2}$; (C) $\frac{3a+1}{2a-2}$; (D) $\frac{2a+1}{a-2}$; (E) $\frac{a+1}{3a-2}$.
2. Broj rešenja jednačine $|x+2| = 2(3-x)$ koja pripadaju intervalu $[1, 9]$ je
- (A) 2; (B) 1; (C) 0; (D) 3; (E) beskonačno mnogo.
3. Broj rešenja jednačine $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$ koja pripadaju intervalu $[-3, 2]$ je
- (A) 0; (B) 2; (C) 1; (D) 4; (E) beskonačno mnogo.
4. Zbir kvadrata rešenja sistema jednačina $2^x + 2^y = 12$, $x + y = 5$ je:
- (A) 24; (B) 1; (C) 13; (D) 12; (E) 7.
5. Skup rešenja nejednačine $\log_{0,5}(x+2) > 1$ je:
- (A) $[-1, 3)$; (B) $(-2, 2)$; (C) $(1, 3/2)$; (D) $(-2, -3/2)$; (E) $(2, 3]$.
6. Vrednost izraza $\cos 195^\circ \cos 15^\circ + \cos 105^\circ \sin 75^\circ$ je:
- (A) -1; (B) $-\frac{3+\sqrt{3}}{4}-1$; (C) $\sqrt{3}$; (D) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$; (E) $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
7. Izraz $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$ identički je jednak izrazu:
- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha$; (B) $\sin 2\alpha$; (C) $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$; (D) $\cos 2\alpha$; (E) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha$.
8. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ broj rešenja jednačine $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$ je:
- (A) 3; (B) 1; (C) 0; (D) 2; (E) 7.
9. Tačke $A(3, 4)$, $B(4, 1)$ i $C(1, 2)$ su temena trougla ABC . Jednačina prave koja sadrži težišnu duž povučenu iz temena B je
- (A) $3x + 4y = 1$; (B) $2x - y = 3$; (C) $y = x + 5$; (D) $2x + 3y = 11$; (E) $y + x - 5 = 0$.
10. Iz fokusa hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ konstruisana je normala na asimptotu. Površina trougla određenog tom normalom, asimptotom i osom x je:
- (A) $3/2$; (B) 4; (C) 6; (D) 7; (E) 10.
11. Tetiva kruga je za 2 manja od prečnika, a odstojanje centra kruga od tetive je za 2 manje od poluprečnika kruga. Dužina tetive kruga je:
- (A) 1; (B) 2; (C) 5; (D) 3; (E) 7.
12. Omotač kupe ima površinu 36π , a izvodnica je tri puta veća od poluprečnika osnove. Površina kupe je:
- (A) 17π ; (B) 49π ; (C) 36π ; (D) 48π ; (E) 18π .

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

30. juni, 2005. godine, prvi upisni rok školske 2005/2006 godine

Upozorenje: Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

Uputstvo:

- 1) Kandidati predaju samo blanket sa zaokruženim odgovorima.
- 2) Kandidat bira **samo jedan** od ponudjenih odgovora, zaokruživanjem jednog od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- 3) Pogrešan odgovor donosi negativnih 0,5 poena.
- 4) Odgovor "(N)" donosi nula poena.
- 5) Zadaci **1, 3, 6, 9, 10 i 11** donose **dva** poena, a zadaci **2, 4, 5, 7, 8 i 12** donose **tri** poena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	------

1. Za $xy \neq 0$, vrednost izraza $\left[\left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{x} \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right] : \frac{(x-y)^2 + 4xy}{1 + \frac{y}{x}}$ je:

- (A) $\frac{x}{y}$; (B) $\frac{x-1}{y-2}$; (C) $\frac{3x+1}{2y-2}$; (D) $\frac{1}{xy}$; (E) $\frac{x+1}{3y-2}$; (N) Ne znam

2. Posle sredjivanja, vrednost razlomka $\frac{x^2 - 1 + |x + 1|}{x^2 - 2x}$ za $x < -1$ je

- (A) 2; (B) $\frac{x}{x+1}$; (C) $\frac{x+1}{x}$; (D) $\frac{x+1}{x-1}$; (E) $\frac{x-1}{x+1}$; (N) Ne znam

3. Rešenja jednačine $\sqrt{1-2x} = x$ nalaze se u intervalu:

- (A) $[-1, 0]$; (B) $(1/2, 2)$; (C) $(0, 1)$; (D) $(-2, -3/2)$; (E) $(2, 3]$; (N) Ne znam

4. Realan parametar c u jednačini $x^2 - 5x + c = 0$, čija rešenja x_1 i x_2 zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 = 13$, je:

- (A) 24; (B) 1; (C) 13; (D) 12; (E) 6; (N) Ne znam

5. Rešenje jednačine $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = \log(2x+3)$ pripada intervalu:

- (A) $[-1, 3]$; (B) $(2, 6]$; (C) $(6, 10)$; (D) $(0, 1/2)$; (E) $[2, 4]$; (N) Ne znam

6. Rešenje jednačine $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} = 27$ pripada skupu:

- (A) $[-1, 1]$; (B) $(-2, 0]$; (C) $(3, 4)$; (D) $(0, 1/4)$; (E) $[2, 3]$; (N) Ne znam

7. Skup rešenja nejednačine $0,5^{x^2-2x} > 2^{-3}$ je:

- (A) $[-1, 2)$; (B) $(-1, 3)$; (C) $(0, 3)$; (D) $(-1, 1)$; (E) $[-2, 1]$; (N) Ne znam

8. Za $x \neq (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ vrednost izraza $\frac{2 \cos 2x + 1}{2 \cos x + 1}$ je:

- (A) $2 \cos x - 1$; (B) $1 - 2 \cos x$; (C) $2 \cos x + 1$; (D) $2 \sin x - 1$; (E) $1 - 2 \sin x$; (N) Ne znam

9. Broj rešenja jednačine $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ koja pripadaju intervalu $(0, 2\pi)$ je:
(A) 2; (B) 3; (C) 1; (D) 4; (E) 0; (N) Ne znam
10. Prava $y = kx + n$, sadrži tačku $A(0, -10)$ i tangenta je hiperbole $4x^2 - y^2 = 20$. Broj k^2 pripada intervalu
(A) $[24, 25)$; (B) $(24, 25)$; (C) $(0, 24)$; (D) $(1, 2)$; (E) $[-4, 5]$; (N) Ne znam
11. U romb površine 18 upisan je krug površine $\frac{9\pi}{4}$. Oštar ugao romba je:
(A) $2\pi/5$; (B) $\pi/8$; (C) $\pi/4$; (D) $\pi/6$; (E) $\pi/3$; (N) Ne znam
12. Bočna ivica pravilne četverostrane piramide je 3 i zaklapa ugao od $\frac{\pi}{4}$ sa ravni osnove. Zapremina piramide je:
(A) 5; (B) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; (C) 6; (D) 4; (E) $3\sqrt{2}$; (N) Ne znam

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

29. juni, 2006. godine, prvi upisni rok školske 2006/2007 godine

Upozorenje: Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

Uputstvo:

- 1) Kandidati predaju samo blanket sa zaokruženim odgovorima.
- 2) Kandidat bira **samo jedan** od ponudjenih odgovora, zaokruživanjem jednog od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- 3) Pogrešan odgovor donosi negativnih 0,5 poena.
- 4) Odgovor "(N)" donosi nula poena.
- 5) Zadaci **1, 2, 5, 8, 10 i 12** donose **dva** poena, a zadaci **3, 4, 6, 7, 9 i 11** donose **tri** poena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	------

1. Za $x \neq \pm 1$ i $y \neq \pm 1$, vrednost izraza $\frac{(xy+1)^2 - (x+y)^2}{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}$ je:
 - (A) $x + y$; (B) 1; (C) $x - 1$; (D) 2; (E) $y + 1$; (N) Ne znam
2. Neka je $z = x + iy$ kompleksan broj takav da je $|z - i| = |z - 1|$. Tada za x i y važe uslovi:
 - (A) $x = 1, y = 1$; (B) $x \geq 0, y = 1$; (C) $y = x$; (D) $x^2 + y^2 = 1$; (E) $y = 2x$; (N) Ne znam
3. Jednačina $x - \sqrt{7-x} = 1$ ima rešenje u intervalu:
 - (A) $[0, 1/2)$; (B) $(1/2, 2)$; (C) $(0, 1)$; (D) $(2, 3/2)$; (E) $(2, 3)$; (N) Ne znam
4. Rešenja x_1, x_2 , jednačine $x^2 - x + a - 2 = 0$ zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1x_2}{2} + 4 = 0$, ako je:
 - (A) $a \in \{1, 2\}$; (B) $a \in \{0, 3\}$; (C) $a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; (D) $a \in \{-1, 1\}$; (E) $\forall a \in R$; (N) Ne znam
5. Vrednost izraza $mx^2 + 2x + 1$ je veći od nule za svaki $x \in R$ ako je:
 - (A) $m > 0$; (B) $0 < m < 1$; (C) $m < -1$; (D) $m > 1$; (E) $|m| < 4$; (N) Ne znam
6. Sistem jednačina: $\log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2$ i $\log_{27}(x + y) = 2/3$ ima rešenje (x, y) takvo da je:
 - (A) $x^2 + y^2 = 4$; (B) $x^2 - y^2 = 1$; (C) $2x^2 + y^2 = 36$; (D) $|x| + |y| = 5$; (E) $x^2 + y^2 = 45$; (N) Ne znam
7. Rešenje nejednačine $\log_{1/2} \left(\log_{1/3} \frac{x+1}{x-3} \right) \leq 0$ je interval:
 - (A) $(-\infty, -1)$; (B) $(-1, 3)$; (C) $(-3, -1)$; (D) $(3, +\infty)$; (E) $(-\infty, 1]$; (N) Ne znam
8. Ako je $\alpha + \beta = \pi/4$, onda je vrednost izraza $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta)$ jednaka:
 - (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) 5; (N) Ne znam
9. Broj rešenja jednačina $\cos x - 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = 3$ na segmentu $[-4\pi, 4\pi]$ je:
 - (A) 2; (B) 3; (C) 1; (D) 4; (E) 0; (N) Ne znam

10. Teme na pozitivnoj strani ose x hiperbole sa asimptomom $x = 2y$ i tangentom $5x - 6y - 8 = 0$ je tačka sa koordinatama:

(A) $(2, 0)$; (B) $(\sqrt{2}, 0)$; (C) $(3, 0)$; (D) $(1/2, 0)$; (E) $(\sqrt{3}, 0)$; (N) Ne znam

11. Dat je romb stranice 1 cm čija je jedna dijagonala $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm. Oštar ugao romba je:

(A) 15° ; (B) 30° ; (C) 45° ; (D) 60° ; (E) 75° ; (N) Ne znam

12. Visina pravilne četverostrane prizme je 2 cm, a osnovna ivica 4 cm. Poluprečnik lopte opisane oko prizme je:

(A) 3 cm; (B) 5 cm; (C) 6 cm; (D) $\sqrt{6}$ cm; (E) $2\sqrt{3}$ cm; (N) Ne znam

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

28. juni, 2007. godine, prvi upisni rok školske 2007/2008 godine

- Pogrešan odgovor donosi negativnih 0,5 poena, a odgovor (N) 0 poena.
- Tačan odgovor donosi 3 poena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Vrednost izraza $\left(\frac{3x+2\sqrt{x}}{4-9x} + \frac{x\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2-3\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x^5}}{2+3\sqrt{x}}$ je:
 (A) 1; (B) $-\frac{1}{2}$; (C) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; (D) $\frac{1}{x}$; (E) $\frac{\sqrt{x}+1}{2-3\sqrt{x}}$; (N) Ne znam.
2. Zbir $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4$ jednak je:
 (A) 2; (B) -1; (C) 0; (D) 3; (E) 7; (N) Ne znam.
3. Rešenja jednačine $x - 2\sqrt{x+5} = 10$ pripadaju intervalu:
 (A) (19, 21); (B) (7, 9); (C) (1, 5); (D) (-1, 2); (E) (0, 3); (N) Ne znam.
4. Za koliko celobrojnih vrednosti m je $mx^2 - (m-3)x + 1 > 0$ za svako realno x ?
 (A) 24; (B) 1; (C) 13; (D) 12; (E) 7; (N) Ne znam.
5. Broj rešenja jednačine $3^{1+\sin x} + 2 \cdot 3^{2+\cos(90^\circ+x)} = 21$ na intervalu $(-1, 17)$ je:
 (A) 0; (B) 6; (C) 7; (D) 3; (E) 1; (N) Ne znam.
6. Ako je (x, y) rešenje sistema $3^x \cdot 2^y = 576$, $\log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4$, tada je $x+y$ jednako:
 (A) 8; (B) -1; (C) 3; (D) 2; (E) 0; (N) Ne znam.
7. Broj rešenja jednačine $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ je:
 (A) 1; (B) 6; (C) 3; (D) 4; (E) 0; (N) Ne znam.
8. Površina trougla određenog koordinatnim osama i tangentom kružnice $x^2 + y^2 = 4$ u dodirnoj tački $T(1, \sqrt{3})$ iznosi:
 (A) 3; (B) 1; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; (E) 7; (N) Ne znam.
9. Stranice trougla su $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Poluprečnik kružnice čiji centar se nalazi na stranici c i koja dodiruje stranice a i b je:
 (A) $\frac{56}{9}$; (B) 3; (C) 5; (D) 11; (E) 1; (N) Ne znam.
10. Osnovna ivica pravilne trostrane piramide je 8, a sve bočne strane nagnute su prema ravni osnove pod uglo od 60° . Površina piramide je:
 (A) 17π ; (B) $48\sqrt{3}$; (C) 36; (D) $48\sqrt{2}$; (E) 18π ; (N) Ne znam.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. juli, 2008. godine, prvi upisni rok školske 2008/2009 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponudjenih odgovora, zaokruživanjem samo jednog od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Pogrešan odgovor kao nezaokružen nijedan od ponudjenih odgovora ili zaokružen više od jednog odgovora donosi negativnih 0,5 poena, a odgovor (N) 0 poena.
- Tačan odgovor donosi 3 poena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Vrednost izraza $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}} : \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 - 3ab} \cdot \frac{ab}{a^2 - b^2}$ je:
- (A) $\frac{ab}{(a+b)^2}$; (B) $\frac{ab}{a^2+b^2}$; (C) $\frac{1}{a-b}$; (D) $-\frac{ab}{(a+b)^2}$; (E) $\frac{a+b}{ab}$; (N) Ne znam.
2. Moduo kompleksnog broja z koji zadovoljava jednačinu $2 + z - iz = 0$ je
- (A) 2; (B) -1; (C) $\sqrt{3}$; (D) $\sqrt{2}$; (E) 3; (N) Ne znam.
3. Jednačina $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 5 = 0$ ima realna rešenja ukoliko realni parametar k pripada intervalu
- (A) $[2, +\infty)$; (B) $(-\infty, 3)$; (C) $(4, 10]$; (D) $(2, +\infty)$; (E) $[10, 15]$; (N) Ne znam.
4. Rešenje jednačine $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$ pripada intervalu:
- (A) $(1, 2)$; (B) $(0, 3)$; (C) $(-5, -1)$; (D) $(-1, 0)$; (E) $(10, 15)$; (N) Ne znam.
5. Rešenje nejednačine $5^{x+1} - 5^{x+2} < 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4}$ je skup
- (A) $(0, +\infty)$; (B) $(-\infty, 0)$; (C) $(1, 18)$; (D) $(-1, 1)$; (E) $(-\infty, +\infty)$; (N) Ne znam.
6. Ako je par (x, y) rešenje sistema $2 \log(x-y) = \log 4$, $2^x \cdot 4^y = 32$, tada je $x^2 + y^2$ jednako:
- (A) 8; (B) 0; (C) 15; (D) 2; (E) 10; (N) Ne znam.
7. Broj rešenja jednačine $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ na intervalu $(0, 2\pi)$ je:
- (A) 0; (B) 6; (C) 2; (D) 4; (E) 1; (N) Ne znam.
8. Izraz $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi, k \in Z$, jednak je:
- (A) $\sin \frac{x}{2}$; (B) $\cos \frac{x}{2}$; (C) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (D) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; (E) 1; (N) Ne znam.
9. Površina pravougaonika upisanog u elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$, čije dve paralelne strane prolaze kroz žiže elipse, iznosi
- (A) 20; (B) 10; (C) $6\sqrt{3}$; (D) 24; (E) 7; (N) Ne znam.
10. Osnovica jednakokrakog trougla je 16 cm, a krak 17 cm. Trougao rotira oko prave koja prolazi kroz teme na osnovici i normalna je na osnovicu. Zapremina dobijenog tela je
- (A) 280π ; (B) 328 ; (C) 1800π ; (D) 1920π ; (E) $1200\sqrt{2}\pi$; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

27. juni, 2009. godine, prvi upisni rok školske 2009/2010 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponudjenih odgovora, zaokruživanjem **samo jednog** od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Pogrešan odgovor kao nezaokružen nijedan od ponudjenih odgovora ili zaokružen više od jednog odgovora donosi negativnih 0,5 poena, a odgovor (N) 0 poena.
- Tačan odgovor donosi 3 poena.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Vrednost izraza $\left(\frac{3x^{-1/3}}{x^{2/3} - 2x^{-1/3}} - \frac{x^{1/3}}{x^{4/3} - x^{1/3}}\right)^{-1} - \left(\frac{1-2x}{3x-2}\right)^{-1}$ je:
 (A) $\frac{2x-1}{x^2}$; (B) $\frac{x^2}{2x-1}$; (C) $\frac{1}{x^2}$; (D) $\frac{x^2}{x-2}$; (E) 2; (N) Ne znam.
2. Vrednost izraza $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2009} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2009}$ je
 (A) 1; (B) -1; (C) $\sqrt{2}$; (D) $\sqrt{3}$; (E) 3; (N) Ne znam.
3. Data je jednačina $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$. Proizvod vrednosti parametra m za koje je zbir kvadrata rešenja date jednačine jednak 4 je
 (A) 2; (B) 11; (C) 9; (D) 0; (E) -1; (N) Ne znam.
4. Rešenje jednačine $2x + 2 + \sqrt{3x^2 + 10x + 7} = 0$ pripada intervalu:
 (A) (1, 2); (B) (0, 3); (C) (-5, -1]; (D) (4, 10); (E) [-1, 0); (N) Ne znam.
5. Rešenje jednačine $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$ pripada intervalu
 (A) (0, 6); (B) $(-\infty, 0)$; (C) (12, 18); (D) (-1, 1); (E) (-2, 0); (N) Ne znam.
6. Ako je par (x, y) rešenje sistema $\log x = 3 - \log y$, $2 \log x - \log y = 0$, tada je $x - y$ jednako:
 (A) 10; (B) -90; (C) 15; (D) -20; (E) 100; (N) Ne znam.
7. Broj rešenja jednačine $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ na intervalu $(0, 2\pi)$ je:
 (A) 0; (B) 6; (C) 2; (D) 4; (E) 1; (N) Ne znam.
8. Izraz $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$, $x \neq k\pi, k \in Z$, jednak je:
 (A) $\sin \frac{x}{2}$; (B) $\cos \frac{x}{2}$; (C) $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (D) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$; (E) 1; (N) Ne znam.
9. Površina pravougaonika upisanog u elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$, čije dve paralelne strane prolaze kroz žiže elipse, iznosi
 (A) 20; (B) 10; (C) $6\sqrt{3}$; (D) 24; (E) 7; (N) Ne znam.
10. Osnovica jednakokrakog trougla je 16 cm, a krak 17 cm. Trougao rotira oko prave koja prolazi kroz teme na osnovici i normalna je na osnovicu. Zapremina dobijenog tela je
 (A) 280π ; (B) 328; (C) 1800π ; (D) 1920π ; (E) $1200\sqrt{2}\pi$; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

29. juni, 2010. godine, prvi upisni rok školske 2010/2011 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponuđenih odgovora, zaokruživanjem samo jednog od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Tačan odgovor donosi 3 poena, a 0 poena odgovor pod (N).
- Negativnih 0,5 poena dobija se ako se zaokruži pogrešan odgovor, ne zaokruži nijedan od ponuđenih odgovora ili zaokruži više od jednog odgovora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

- Ako $a, b \in R^+$ i ako je $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, tada vrednost izraza $\frac{2a\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ je
(A) $a - b$; (B) $a^2 - b^2$; (C) $(a + b)^2$; (D) $a + b$; (E) 2; (N) Ne znam.
- Rešenja x_1 i x_2 jednačine $(m + 1)x^2 - (m - 1)x + m = 0$ zadovoljavaju uslov $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$, ako parametar m pripada skupu
(A) $(-1, 1)$; (B) $[0, 3]$; (C) $(1, 2]$; (D) $(2, 4)$; (E) $[-3, -1) \cup (-1, 0]$; (N) Ne znam.
- Rešenje jednačine $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$ pripada intervalu:
(A) $(19, 22)$; (B) $(17, 19)$; (C) $(-5, -1]$; (D) $(4, 10)$; (E) $[-1, 0)$; (N) Ne znam.
- Proizvod rešenja jednačine $0,5^{x^2 - 20x + 61,5} = 2^{2,5}$ iznosi:
(A) 32; (B) 64; (C) 18; (D) -12; (E) -2; (N) Ne znam.
- Rešenje jednačine $2 + \log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2}$ pripada intervalu
(A) $(-1, 0)$; (B) $(-\infty, -2)$; (C) $(-1, 1)$; (D) $(2, 5)$; (E) $(7, 10)$; (N) Ne znam.
- Proizvod xy rešenja sistema jednačina $3^y \cdot 9^x = 81$, $\log(x+y) - \log x = 2 \log 3$ je
(A) 16; (B) -2; (C) 2; (D) 1.28; (E) 1; (N) Ne znam.
- Vrednost izraza $3 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \frac{\sin 60^\circ}{\sin^4 15^\circ - \cos^4 15^\circ}$ jednaka je
(A) 2; (B) 6; (C) 1; (D) 4; (E) $-\frac{1}{4}$; (N) Ne znam.
- Broj rešenja jednačine $\sin 2x = 2 \sin x \cos 2x$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je
(A) 5; (B) 4; (C) 6; (D) 3; (E) 7; (N) Ne znam.
- Normala hiperbole $4x^2 - y^2 = 20$ u tački $A(3, 4)$, glasi:
(A) $x + y = 3$; (B) $x + 3y = 15$; (C) $y = x$; (D) $x - 2y = 1$; (E) $y = -x$; (N) Ne znam.
- U pravu kupu, poluprečnika osnove $r = 4$ cm i visine $H = 4\sqrt{2}$ cm, upisana je kocka. Zapremina kocke je
(A) $9\sqrt{3}$; (B) $3\sqrt{5}$; (C) $16\sqrt{2}$; (D) $7\sqrt{2}$; (E) 11; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

28. juni, 2011. godine, prvi upisni rok školske 2011/2012 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponuđenih odgovora, zaokruživanjem samo jednog od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Tačan odgovor donosi 3 poena, a 0 poena odgovor pod (N).
- Negativnih 0,5 poena dobija se ako se zaokruži pogrešan odgovor, ne zaokruži nijedan od ponuđenih odgovora ili zaokruži više od jednog odgovora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Vrednost izraza $I = \left(\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a} - \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}} \right) \cdot \left(\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2}-1} \right)$ je
 (A) a^2 ; (B) $1 - a^2$; (C) -1 ; (D) 1 ; (E) 2 ; (N) Ne znam.
2. Dat je izraz $\frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$. Ako je I_1 vrednost ovog izraza za $x \geq 0$, a I_2 za $x < 0$, tada je $I_1 - I_2$ jednako
 (A) -1 ; (B) 3 ; (C) $-x$; (D) x^2 ; (E) 0 ; (N) Ne znam.
3. Funkcija $y = (k-1)x^2 + 2(k-1)x + 2$ je nenegativna za svaki $x \in \mathcal{R}$ ako realni parametar k pripada intervalu:
 (A) $(1, 3]$; (B) $(-1, 2)$; (C) $(-5, -1)$; (D) $(4, 10)$; (E) $[-1, 0)$; (N) Ne znam.
4. Zbir rešenja jednačine $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ iznosi:
 (A) 32 ; (B) 11 ; (C) 18 ; (D) 14 ; (E) -2 ; (N) Ne znam.
5. Proizvod rešenja jednačine $\log_2 x - 3\sqrt{\log_2 x} + 2 = 0$ iznosi:
 (A) 32 ; (B) -20 ; (C) 20 ; (D) 16 ; (E) 10 ; (N) Ne znam.
6. Rešenje nejednačine $\log_{1/3} \frac{1+x}{1+2x} \geq 1$ je skup:
 (A) $[1, 6]$; (B) $(2, 5)$; (C) $(-2, 0)$; (D) $(1, 8)$; (E) $[-2, -1)$; (N) Ne znam.
7. Ako je uredjeni par (x, y) rešenje sistema $2 \log(x-y) = \log 4$, $2^x \cdot 4^y = 32$, tada $x^2 + y^2$ iznosi:
 (A) 2 ; (B) 26 ; (C) 10 ; (D) 20 ; (E) 14 ; (N) Ne znam.
8. Broj rešenja jednačine $\cos x + \sin \frac{x}{2} = 1$ na intervalu $(-4\pi, 4\pi)$ je:
 (A) 5 ; (B) 4 ; (C) 6 ; (D) 3 ; (E) 7 ; (N) Ne znam.
9. Tangenta kruga $x^2 + (y+1)^2 = 4$ koja je paralelna sa pravom $4x + 3y - 4 = 0$ i koja seče y -osu u njenom negativnom delu glasi:
 (A) $4x+3y = -3$; (B) $4x+3y+13 = 0$; (C) $2y = x$; (D) $4x+3y = -1$; (E) $y = -x$; (N) Ne znam.
10. Jednakokraki trapez čije su osnovice $a = 5$ i $b = 3$ i čiji je oštar ugao $\alpha = 60^\circ$ rotira oko duže osnovice. Površina P i zapremina V dobijenog tela su:
 (A) $P = 7\pi, V = 11\pi$; (B) $P = 10\pi\sqrt{3}, V = 11\pi$; (C) $P = 6\sqrt{2}\pi, V = 8\pi$;
 (D) $P = 10\pi\sqrt{3}, V = 14\pi$; (E) $P = 4\pi, V = 6\pi$; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

3. juli, 2012. godine, prvi upisni rok školske 2012/2013 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponuđenih odgovora, zaokruživanjem **samo jednog** od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Tačan odgovor donosi 3 poena, a 0 poena odgovor pod (N).
- Negativnih 0,5 poena dobija se ako se zaokruži pogrešan odgovor, ne zaokruži nijedan od ponuđenih odgovora ili zaokruži više od jednog odgovora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

- Vrednost izraza $\left(2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2} \cdot \left(\sqrt{(-7)^2 + 18\frac{2}{5}} + 10, 6\right) : 8^{1/3}\right)^{2/3}$ je
(A) 0; (B) 7; (C) 9; (D) -9; (E) 2; (N) Ne znam.
- Zbir realnih rešenja jednačine $x^2 + 3 - 3|x + 1| = 0$ iznosi
(A) -1; (B) 3; (C) $3 + 2i$; (D) 4; (E) -3; (N) Ne znam.
- Skup rešenja nejednačine $\frac{x^2 - 2x - 10}{x^2 - x - 12} \leq 1$ je:
(A) $(-3, 2] \cup (4, +\infty)$; (B) $(-3, 2]$; (C) $(4, +\infty)$; (D) $(-3, 2)$; (E) $(-\infty, 2)$; (N) Ne znam.
- Skup svih vrednosti realnog parametra k za koje jednačina $4x^2 + 4(2 - k)x + k = 0$ ima dva različita negativna rešenja je:
(A) $(0, 1]$; (B) $(0, 1)$; (C) $(-\infty, 1)$; (D) $(4, +\infty)$; (E) $(0, 2)$; (N) Ne znam.
- Ako je $z = x + iy$ rešenje jednačine $|z - 2i| + \bar{z} = 3 - 2i$, tada je $x + y$ jednako
(A) -1; (B) $1/2$; (C) $7/2$; (D) 2; (E) -2; (N) Ne znam.
- Zbir rešenja jednačine $2 + \log \sqrt{1+x} + 3 \log \sqrt{1-x} = \log \sqrt{1-x^2}$ je
(A) 0; (B) 2, 1; (C) 1, 2; (D) 0, 99; (E) -1, 2 ; (N) Ne znam.
- Proizvod rešenja jednačine $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$ je
(A) 3; (B) 2; (C) -6; (D) 4; (E) -1; (N) Ne znam.
- Broj rešenja jednačine $2 \cos 2x + 4 \cos x = 1$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je
(A) 5; (B) 4; (C) 3; (D) 2; (E) 7; (N) Ne znam.
- Tačke $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$ i $C(1, 2)$ su temena trougla. Jednačina prave nam kojoj leži visina trougla povučena iz temena C , glasi:
(A) $x + y = 3$; (B) $x + 3y = 15$; (C) $5y - 2x = 8$; (D) $x - 2y = 1$; (E) $y = -x$; (N) Ne znam.
- Ako je $V = \frac{\sqrt{6}}{4}$ zapremina pravilnog tetraedra, tada je njegova visina jednaka
(A) $\sqrt{3}$; (B) $\sqrt{2}$; (C) $\sqrt{6}$; (D) $3\sqrt{2}$; (E) $2\sqrt{3}$; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

2. juli, 2013. godine, prvi upisni rok školske 2013/2014 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponuđenih odgovora, zaokruživanjem **samo jednog** od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Tačan odgovor donosi 3 poena, a 0 poena odgovor pod (N).
- Negativnih 0,5 poena dobija se ako se zaokruži pogrešan odgovor, ne zaokruži nijedan od ponuđenih odgovora ili zaokruži više od jednog odgovora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Izraz $\left(\frac{x}{1-x} - \frac{4x^2-x}{1-x^3} - \frac{1}{1+x+x^2}\right) : (1-x^2)$ negativan je za vrednosti x iz intervala
 (A) $(-\infty, -1)$; (B) $(0, 2)$; (C) $(1, +\infty)$; (D) $(-2, 0)$; (E) $(-1, 1)$; (N) Ne znam.
2. Vrednosti parametra a za koje nejednačina $x^2 - 2ax - 6a + 12 > -4$ važi za svaki realni x pripadaju intervalu
 (A) $(-1, 3)$; (B) $(3, 4)$; (C) $(-1, 1)$; (D) $(-8, 2)$; (E) $(-3, 2)$; (N) Ne znam.
3. Vrednost parametra c , pod uslovom da koreni jednačine $x^2 - 6x + c = 0$ zadovoljavaju relaciju $3x_1 + 2x_2 = 20$, jednaka je
 (A) 12; (B) 20; (C) -16; (D) -12; (E) 16; (N) Ne znam.
4. Rešenja jednačine $|6 - 2x| = 3x + 1$ nalaze se u intervalu
 (A) $(-8, 1)$; (B) $(0, 2)$; (C) $(3, 5)$; (D) $(6, 7)$; (E) $(7, 9)$; (N) Ne znam.
5. Vrednost izraza $2 \sin 600^\circ - 2 \cos 135^\circ + 3 \operatorname{ctg}(-120^\circ)$ iznosi
 (A) $\sqrt{2}$; (B) $\sqrt{3}$; (C) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; (D) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; (E) -1; (N) Ne znam.
6. Rešenja jednačine $\log_5 \sqrt{3+x} + \log_5 \sqrt{4x-3} = 1$ pripadaju intervalu
 (A) $(-1, 3)$; (B) $(3, 5)$; (C) $(1, 2)$; (D) $(5, 8)$; (E) $(-11, -2)$; (N) Ne znam.
7. Zbir rešenja jednačine $(19 + 6\sqrt{10})^x + (19 - 6\sqrt{10})^x = 38$ je
 (A) -3; (B) 0; (C) 6; (D) 4; (E) -1; (N) Ne znam.
8. Broj rešenja jednačine $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je
 (A) 5; (B) 4; (C) 2; (D) 3; (E) 7; (N) Ne znam.
9. Normala parabole $y = x^2 + 4x + 7$ u tački koja je najbliža pravoj $y = 2x - 9$ ima jednačinu
 (A) $y = x$; (B) $x + y = 6$; (C) $x + 2y = -7$; (D) $x + 2y = 7$; (E) $x + y = 1$; (N) Ne znam.
10. Visina prave kupe dobijene topljenjem lopte poluprečnika $r = \sqrt[3]{2}$, pri čemu je površina omotača kupa tri puta veća od površine osnove, iznosi
 (A) 3; (B) $2\sqrt{3}$; (C) 4,5; (D) $\sqrt{2}$; (E) 4; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

8. juli, 2014. godine, prvi upisni rok školske 2014/2015 godine

Na blanketu nije dozvoljeno nikakvo dodatno pisanje i označavanje.

- Kandidat bira jedan od ponuđenih odgovora, zaokruživanjem **samo jednog** od slova (A), (B), (C), (D), (E) ili (N).
- Tačan odgovor donosi 3 poena, a 0 poena odgovor pod (N).
- Negativnih 0,5 poena dobija se ako se zaokruži pogrešan odgovor, ne zaokruži nijedan od ponuđenih odgovora ili zaokruži više od jednog odgovora.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ZBIR
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	------

1. Za $a > 0, b > 0, a \neq b$, izraz $\left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a\sqrt{ab}}{a+b} - \frac{2b}{a-b}$ jednak je
 (A) $a + b$; (B) $a - b$; (C) 2; (D) 3; (E) 4; (N) Ne znam.
2. Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 + i$. Kompleksan broj $z = x + yi$ koji zadovoljava sistem $Re\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5}, Im(\bar{z} \cdot z_1) = 1$ jednak je
 (A) $1 + 2i$; (B) $2 + 3i$; (C) $-1 - i$; (D) $-1 - 2i$; (E) $3 - i$; (N) Ne znam.
3. Jednačina $x^2 - 4mx + 4m^2 + 4m = 0$ ima negativna međusobno različita rešenja, ako parametar m pripada skupu
 (A) $(-1, 3)$; (B) $(3, 4)$; (C) $(-1, 1)$; (D) $(-\infty, -1)$; (E) $(-3, 2)$; (N) Ne znam.
4. Proizvod rešenja jednačine $x^{1+\log_3 x} = 3x$ je
 (A) -7 ; (B) 1; (C) 5; (D) -1 ; (E) 2; (N) Ne znam.
5. Broj celobrojnih rešenja nejednačine $x + 2 \geq \sqrt{4-x}$ je
 (A) 5; (B) 6; (C) 1; (D) 3; (E) 4; (N) Ne znam.
6. Vrednost izraza $\frac{\operatorname{tg}(-306^\circ) \sin(-24^\circ) \cos 315^\circ}{\sin(-330^\circ) \cos(-246^\circ) \operatorname{ctg} 396^\circ}$ je
 (A) $\sqrt{3}$; (B) $-\sqrt{2}$; (C) 1; (D) $\sqrt{2}$; (E) $-\sqrt{3}$; (N) Ne znam.
7. Broj rešenja jednačine $\cos x - \cos 2x = 1$ na segmentu $[0, 2\pi]$ je
 (A) 4; (B) 0; (C) 6; (D) 3; (E) 1; (N) Ne znam.
8. Jednačine tangente elipse $2x^2 + 3y^2 = 35$ koja je normalna na pravu $3x - 8y - 24 = 0$ i seče pozitivni deo ose y je
 (A) $y = x$; (B) $x + y = 6$; (C) $8x + 3y = 35$; (D) $8x + 3y = 7$; (E) $8x + 3y = 3$; (N) Ne znam.
9. Poluprečnik kružnice čiji je centar presečna tačka pravih $3x + y + 4 = 0$ i $x + 2y - 2 = 0$ i koja dodiruje pravu $5x + 12y - 1 = 0$ je
 (A) 4; (B) 2; (C) 3; (D) 5; (E) 1; (N) Ne znam.
10. Središte gornje osnove kocke, ivice $a = 2$, je vrh, a središta stranica donje osnove su temena piramide. Površina piramide je
 (A) 2; (B) $2\sqrt{3}$; (C) $2 + 2\sqrt{6}$; (D) 8; (E) $2\sqrt{2}$; (N) Ne znam.

Ispitna komisija

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

1. juli, 2015. godine, prvi upisni rok školske 2015/2016. godine

1	2	3	4	5	6	ZBIR
---	---	---	---	---	---	------

1. Odrediti vrednost realnog parametra m za koju rešenja x_1 i x_2 jednačine

$$x^2 - 2(m - 3)x + 8 - 5m = 0$$

zadovoljavaju uslov $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

2. Rešiti jednačinu

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 5\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x} + 4 = 0.$$

3. Rešiti jednačinu $\cos x - \cos 2x = 1$.

4. Stub visine h vidi se iz tačke A pod uglom od 75° , a iz tačke B , udaljene od tačke A 10m, vidi se uglom od 60° . Izračunati vrednost h .

5. Oko jednakostraničnog trougla ABC čije je jedno teme $A(0, 2)$ opisana je kružnica $x^2 + y^2 = 4$. Odrediti koordinate temena B i C .

6. Tačka $M(\frac{5}{2}, -1)$ deli tetivu parabole $y^2 = 4x$ na dva jednaka dela. Naći dužinu tetive.

Ispitna komisija

Наведимо неколико примера задатака какве убудуће треба очекивати на пријемним испитима.

Задаци

1. Вредност количника

$$((3\sqrt{2}-4)^{-1} - (3\sqrt{2}+4)^{-1}) : \left(\frac{1}{5+2\sqrt{6}} + 5 - 2\sqrt{6}\right)$$

једнака је:

(А) 12; (Б) $\frac{8}{5+2\sqrt{6}}$; (В) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$; (Г) $\frac{2}{5}$;

(Д) $10+4\sqrt{6}$;

2. Дужине страница троугла су 5cm, 7cm и 8cm. Дужина најдуже странице њему сличног троугла обима 4m је:

(А) 160cm; (Б) 132cm; (В) 140cm; (Г) 1m; (Д) 180cm;

3. Ако је $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = 4x - 1$, онда је збир $f\left(g\left(\frac{5}{4}\right)\right) + g\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right)$ једнак:

(А) $5 - \sqrt{5}$; (Б) $2\sqrt{5}$; (В) $5 + \sqrt{5}$; (Г) 10; (Д) 180cm;

4. Нека је троугао ABC једнакокрак са основицом AB и нека је AD симетрала угла BAC (тачка D припада дужи BC). Ако је угао ADB једнак 75° , онда је угао ABC једнак:

(А) 50° ; (Б) 70° ; (В) 40° ; (Г) 60° ; (Д) 45° ;

5. Број целобројних решења неједначине

$$|2x - 3| - |3x + 7| \geq 0$$

је:

(А) 10; (Б) 4; (В) ∞ ; (Г) 0; (Д);

6. Ако параметар m припада скупу целих бројева и једначина $mx^2 + (3m - 2)x + 2 = 0$ има реална и једнака решења, онда су решења ($x_1 = x_2$) те једначине једнака:

(А) 3; (Б) $1/2$; (В) 2; (Г) -1 ; (Д) 0;

7. Странице троугла припадају правима $x+y-4=0$, $x-y+2=0$, $3x-y-8=0$. Површина тог троугла једнака је:

(А) $16\sqrt{2}$; (Б) 32; (В) 8; (Г) $27\sqrt{3}$; (Д) 16;

8. Једначина $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}$ има на одсечку $[0, 15]$ различитих решења тачно:

(А) 6; (Б) 5; (В) 4; (Г) 3; (Д) 2;

9. Ромб странице a и оштрог угла од 60° обрће се редом, око краће и око дуже дијагонале. Разлика запремина тако насталих двају тела је:

(А) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8} \pi a^3$; (Б) $\frac{1 - \sqrt{3}}{12} \pi a^3$; (В) $12\sqrt{3} \pi a^3$;

(Г) $\frac{3 - \sqrt{3}}{4} \pi a^3$; (Д) $\frac{3 - \sqrt{3}}{12} \pi a^3$;

10. Дужине основица једнакокраког трапеза су 10cm и 6cm а краци заклапају угао од 75° са већом основицом. Површина тог трапеза ($y \text{ cm}^2$) је:

(А) $16(2 + \sqrt{3})$; (Б) $16(2 - \sqrt{3})$; (В) $5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$;

(Г) $8(1 + \sqrt{2})$; (Д) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;

11. Збир решења једначине $\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$ једнак је:

(А) 4; (Б) 7; (В) 1; (Г) -7 ; (Д) -3 ;

12. Збир квадрата свих решења једначине једначине

$$||x| - 1| = 1$$

је:

(А) 4; (Б) 12; (В) 25; (Г) 8; (Д) 16;

13. Бочна ивица правилне четворостране пирамиде (усправна пирамида чија је основа квадрат) има дужину 3dm и заклапа угао од 45° са равни основе. Запремина пирамиде је ($y \text{ dm}^3$):

(А) $4\sqrt{6}$; (Б) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; (В) $6\sqrt{2}$; (Г) 9; (Д) $\frac{27\sqrt{2}}{4}$;

14. Најмањи природан број k , такав да неједнакост

$(k - 2)x^2 + 8x + k + 4 > 0$ важи за свако x , је:

(А) 6; (Б) 3; (В) 1; (Г) 8; (Д) 5;

15. Права $3x - y - 1 = 0$ и кружна линија $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ секу се под оштрим углом од:

(А) 45° ; (Б) 30° ; (В) 90° ; (Г) 75° ; (Д) 60° ;

16. Збир кубова свих нула полинома $x^2 - 5x + 7$ једнак је:

(А) 12; (Б) 16; (В) 20; (Г) 23; (Д) 36;

17. У равни је дат круг полупречника r и тачка T ван њега. Круг се из тачке T види под правим углом. Пвршина ограниченог дела равни садржаног унутар тога угла и изван датог круга једнака је:
- (А) $\frac{1}{4}r^2(4 + \pi)$; (Б) $\frac{1}{12}\pi r^2$; (В) $2r^2(\pi - 3)$; (Г) $\frac{1}{6}r^2(\pi - \sqrt{2})$;
 (Д) $\frac{1}{4}r^2(4 - \pi)$;
18. Збир $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^4$ (где је $i^2 = -1$) једнак је:
- (А) $\sqrt{3}$; (Б) $\frac{1 - 9i}{16}$; (В) 0; (Г) $2i$; (Д) -1 ;
19. Права $x = 1$ сече кружну линију $x^2 + y^2 = 4$ у тачкама T_1 и T_2 . Дата права и тангенте кружне линије у тачкама T_1 и T_2 одређују троугао T_1T_2P . Површина троугла је:
- (А) $3\sqrt{3}$; (Б) $\pi\frac{\sqrt{3}}{2}$; (В) $\sqrt{3}$; (Г) $4\sqrt{3}$; (Д) $4\sqrt{2}$;
20. Збир свих решења једначине $|x - 2| + |x + 3| = 7$ једнак је:
- (А) -5 ; (Б) 1; (В) -1 ; (Г) 7; (Д) 5;
21. Једначина $x^2 - 2(k + 1)x + (k^2 + 5) = 0$ (k је реалан параметар) има два различита позитивна решења ако и само ако број k припада интервалу:
- (А) $(-2, 2)$; (Б) $(-1, \infty)$; (В) $[3, 5)$; (Г) $(2, +\infty)$;
(Д) $(\sqrt{5}, +\infty)$;
22. Једначина $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$ у скупу реалних бројева има:
- (А) јединствено решење и оно припада интервалу $(18, 25]$; (Б) нема решења; (В) јединствено решење у интервалу $(12, 16)$; (Г) више од два решења; (Д) два решења која припадају $(-10, 10)$;
23. Међу тачкама параболе $y = x^2 + 4x + 7$ тачка T је најближа правој $y = 2x - 9$. Растојање тачке T од дате праве је:
- (А) $5\sqrt{2}$; (Б) $34/5$; (В) $3\sqrt{5}$; (Г) $4\sqrt{3}$; (Д) $2\sqrt{11}$;
24. Скуп решења неједначине $\frac{2x - 5}{x + 3} \leq 1$ је:
- (А) $(-3, 8]$; (Б) $[-3, 8]$; (В) $(-\infty, -3)$; (Г) $[8, +\infty)$; (Д) $(-3, 5/2)$;
25. За колико целобројних вредности параметра k је $(k + 3)x^2 - (k + 3)x - 2 < 0$ за свако $x \in R$?
- (А) 15; (Б) 11; (В) 10; (Г) 8; (Д) 7;

26. Угао између изводнице и висине праве кружне купе је 60° , а разлика њихових дужина је 3m . Запремина те купе (у m^2) је:
 (А) $24\sqrt{3}\pi$; (Б) 30π ; (В) 9π ; (Г) 18π ; (Д) 27π ;
27. Број решења једначине $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x = 0$ на интервалу $[0, 2\pi]$ је:
 (А) 2; (Б) 3; (В) 4; (Г) 5; (Д) 7;
28. Скуп решења неједначине $\log_{1/2} \left(\log_3 \frac{x+1}{x-1} \right) \geq 0$ је:
 (А) $[2, +\infty)$; (Б) $[-1, 1]$; (В) $(1, +\infty)$; (Г) $(1, 2]$;
 (Д) $(1/2, 2)$;
29. Ако је α угао између страна ABC и ABD правилног тетраедра (једнакоивична тространа пирамида), онда је збир $\sin \alpha + \cos \alpha$ једнак:
 (А) $\frac{1}{\sqrt{3}}(2 + \sqrt{2})$; (Б) $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{2})$; (В) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$;
 (Г) $2(\sqrt{2} - 1)$; (Д) $\frac{1}{3}(1 + 2\sqrt{3})$;
30. Збир кавдрата једначине $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0$ је:
 (А) 15; (Б) 5; (В) 13; (Г) 16; (Д) 20;
31. Скуп свих решења једначине $\sqrt{x} = x - 2$ је:
 (А) једночлан; (Б) двочлан; (В) празан;
 (Г) трочлан; (Д) четворочлан;
32. Дужина основице једнакокраког троугла је 36cm, а висина која одговара основици је 20cm. Дужина висине која одговара краку је:
 (А) 20cm; (Б) 25cm; (В) 26cm; (Г) 24cm; (Д) 15cm;
33. Вредност израза $\left(0,05 + \left(\frac{2}{3} : \frac{2}{13} \right)^{-1} \right)^{-1/2} + \sqrt{(-2)^2}$ је:
 (А) $\sqrt{15}$; (Б) 0; (В) 4; (Г) $1/16$; (Д) 5;
34. Наспрамна темена квадрата $ABCD$ су тачке $A(-1, 3)$ и $C(5, 1)$. Једначина праве одређене дијагоном BD је:
 (А) $x + 3y - 8 = 0$; (Б) $2x + y - 1 = 0$; (В) $x - 2y - 3 = 0$; (Г) $x - 2y + 7 = 0$;
 (Д) $3x - y - 4 = 0$;

35. Ако је $x > 0$ и $y > 0$, израз

$$\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

једнак је изразу:

(А) $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{xy}}$; (Б) $-\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$; (В) $-\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x+y}}$; (Г) $-\frac{1}{2\sqrt{xy}}$; (Д) $2\sqrt{x+y}$;

36. Ако је уређен пар (x, y) решење система

$$4^{x+y} = 2^{y-x}, \quad 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5$$

онда је збир $x^2 + y^2$ једнак:

(А) $5/2$; (Б) 2 ; (В) $41/8$; (Г) 1 ; (Д) 3 ;

37. За позитивне бројеве a, b, c важи једнакост $\frac{a^3 + b^3}{a^3 + c^3} = \frac{a + b}{a + c}$ ако и само ако је:

(А) $b = c$; (Б) $a = b + c$; (В) $b = c$ или $a = c + b$;

(Г) $b = c$ и $a = 2c$; (Д) $b = c$ и $a \neq c + b$;

38. Дате су функције $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, $f_2(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $f_3(x) = \frac{\log_2 2^x}{x}$, $f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}$. Тачан је исказ:

(А) све функције су међусобно једнаке; (Б) међу датим функцијама нема једнаких; (В) $f_1 = f_3 = f_4$;

(Г) $f_1 \neq f_2 \neq f_3 = f_4 \neq f_1$; (Д) $f_2 = f_3 = f_4 \neq f_1$;

39. Скуп решења неједначине $\frac{3x^2 - 17x + 18}{x^2 - 5x + 4} \leq 2$ је:

(А) $(1, 2]$; (Б) $(1, 2] \cup (4,]$; (В) $[1, 2) \cup [4, 5]$;

(Г) $(2, 4) \cup [5, +\infty)$; (Д) $(-\infty, 1) \cup [2, 4)$;

40. Дужине страница (у см) датог троугла су $a - 2$ и $a + 2$, а један угао троугла има меру 120° . Површина тог троугла (у cm^2) је:

(А) $\frac{15}{2}$; (Б) 8 ; (В) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$; (Г) $\frac{5\sqrt{3}}{4}$; (Д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

41. Дата је једначина $x^2 + (a + 1)x + a^2 - 1 = 0$ ($a \in R$). Решења x_1 и x_2 једначине се реална и задовољавају услов $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 > 0$ ако и само ако је:

(А) $-1 < a < 2$; (Б) $-1 \leq a < 2$; (В) $-1 < a \leq \frac{5}{3}$;

(Г) $|a| \geq 2$; (Д) $|a| < 2$;

42. Ако је $\log_3 5 = a$ и $\log_5 7 = b$, онда је $\log_{105} 405$ једнак:

(А) $\frac{4+a}{1+a-ab}$; (Б) $5+ab$; (В) $\frac{4-a}{1+a-ab}$;

(Г) $\frac{4+a}{1+a+ab}$; (Д) $\frac{ab}{4+a}$;

43. У троугао ABC уписан је паралелограм максималне површине тако да му две странице припадају страницама AB и AC датог троугла. Ако је $|AB| = a$, $|AC| = b$, угао код темена A једнак је 30° , површина паралелограма је:

(А) $\frac{bc}{2}$; (Б) $\frac{bc}{4}$; (В) $\frac{bc}{8}$; (Г) $\frac{b^2+c^2}{4}$; (Д) $\frac{b^2+c^2}{8}$;

44. Скуп решења једначине $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{1/4} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4}$ је:

(А) $(1/4, 3/4]$; (Б) $(0, 1] \cup [2, +\infty)$; (В) $[1, 2]$;

(Г) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$; (Д) $(0, 2) \cup (2, +\infty)$;

45. Ивица правилног тетраедра (у см) има дужину a . Површина пресека тетраедра са равни која садржи ивицу тетраедра и која наспрамну страну дели у размери 2:1 је (у см²):

(А) $\frac{a^2\sqrt{21}}{12}$; (Б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$; (В) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$; (Г) $\frac{a^2\sqrt{203}}{36}$;

(Д) $\frac{a^2\sqrt{19}}{12}$;

46. Вредност израза

$$\left(\frac{2^{-4} - 3^{-4}}{2^{-1} - 3^{-1}} \cdot (2^{-1} - 3^{-1})^{-1} - 3^{-1} \cdot 81^{-(2^{-2})} \right)^{-1/2}$$

је:

(А) 2; (Б) 1/2; (В) -1/2; (Г) -2; (Д) 2⁻²;

47. Ако је $a \in R^+ \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$, израз

$$\left(\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{1/2} - 3a^{-1/2}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} \right)^2$$

идентички је једнак:

(А) 2; (Б) 9; (В) 9a; (Г) 2a; (Д) $\frac{1}{2a-3}$;

48. Права $y = kx + n$ садржи тачку $A(0, -10)$ и тангента је хиперболе $4x^2 - y^2 = 20$. Тада k^2 припада интервалу:
 (А) $(0, 6]$; (Б) $(6, 12]$; (В) $(24, 36]$; (Г) $(12, 18]$;
 (Д) $(18, 24]$;
49. У ромб површине 18 уписан је круг површине $\frac{9\pi}{4}$. Оштар угао је:
 (А) 15° ; (Б) 30° ; (В) 45° ; (Г) 60° ; (Д) 75° ;
50. Вредност израза $(1 + i)^{2001} + (1 - i)^{2001}$ је:
 (А) 2^{1001} ; (Б) $2^{1002}i$; (В) $2^{1001}i$; (Г) 2^{1002} ; (Д) $-2^{1001}i$;
51. Ако је $x \in \mathbb{R}$ решење једначине $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$, тада је x :
 (А) ирационалан број већи од 10; (Б) ирационалан број мањи од 10; (В) рационалан број већи од 10;
 (Г) рационалан број мањи од 10; (Д) број мањи од 1;
52. Скуп свих решења неједначине $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$ је подскуп скупа:
 (А) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$; (Б) $(-\infty, -1)$; (В) $(-\infty, 0]$;
 (Г) $[-1, 1]$; (Д) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$;
53. Ако за реалан број a важи $x + y = a$ и $xy = a^2 - 7a + 14$, тада $x^2 + y^2$ достиже максималну вредност за:
 (А) $a = -6$; (Б) $a = 6$; (В) $a = 1$; (Г) $a = 6$; (Д) $a = 9$;
54. Скуп решења неједначине $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_{1/2}(x^2+2x+4)} > 1,25$ је
 (А) $(-\infty, -1] \cup (-1, +\infty)$; (Б) $(0, +\infty)$; (В) $(-\infty, +\infty)$; (Г) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;
 (Д) празан скуп;
55. Број решења једначине $\cos 4x + 3 \cos 2x + 2 \sin^2 x = 0$ која припадају интервалу $(-3\pi/2, 3\pi/2]$ је:
 (А) 2; (Б) 4; (В) 6; (Г) 7; (Д) 10;
56. Једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ где је m реалан параметар, има тачно једно решење на интервалу $(-2, 3)$ ако и само ако:
 (А) $m \in \mathbb{R}$; (Б) $m \in (-\infty, -1)$; (В) $m \in (4, +\infty)$;
 (Г) $m \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$; (Д) $m \in (-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$;

57. У лопту полупречника R уписна је права купа максималне површине омотача. Висина те купа једнака је:

(А) $R\sqrt{2}$; (Б) $\frac{4}{3}R$; (В) $R\sqrt{3}$; (Г) $\frac{3}{2}R$; (Д) $\frac{5}{4}R$;

58. Нека је CD тежишна дужтроугла ABC и нека је $|BC| = 12\text{cm}$, $|AC| = 20\text{cm}$ и $|CD| = 2\sqrt{19}\text{cm}$. Површина троугла ABC у cm^2 је:

(А) $60\sqrt{2}$; (Б) $65\sqrt{3}$; (В) 225; (Г) 180; (Д) $60\sqrt{3}$;

59. Скуп решења неједначине $2^x > 3^x$ је:

(А) празан скуп; (Б) $(0, +\infty)$; (В) $(-\infty, 0)$; (Г) $(3, 4)$; (Д) $(0, 1)$;

60. Ако су $a, b \in \mathbb{R}$ и $a^2 \neq b^2$, вредност израза $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$ је:

(А) $a - b$; (Б) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$; (В) $\frac{a^2 - ab + b^2}{a + b}$; (Г) $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$; (Д) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

61. Дати су искази (а) $\log((-2)(-3)) = \log(-2) + \log(-3)$, (б) $\log(-3)^2 = 2\log(-3)$, (с) $\log(-2)^4 = 2\log(-2)^2$, (д) $\log\frac{-2}{-3} = \log 2 - \log 3$. Који од њих су тачни:

(А) ниједан; (Б) сви; (В) (а) и (д); (Г) (б) и (с);

(Д) (с) и (д).

62. Ако је a реалан број и $|a| \neq 2$, тада је вредност израза

$$\left(\frac{a+1}{a^2-4} + \frac{1-a^2}{a^3+8}\right) : \frac{1}{(a-1)^2+3}$$

једнака:

(А) $\frac{a-2}{a+1}$; (Б) $\frac{a+1}{a-2}$; (В) a ; (Г) 1;

(Д) $\frac{a+1}{(a^2+8)(a^2-2a+4)}$.

63. За $a = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ и $b = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ израз $(a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ има вредност:

(А) 1; (Б) $\sqrt{3}$; (В) $\frac{1}{3}$; (Г) $1 + \sqrt{3}$; (Д) 2;

64. Ако је површина лопте 324π , њена запремина је :

(А) $18^3\pi$; (Б) $18^3\pi^2$; (В) 972π ; (Г) 2961π ; (Д) 108π .

65. Колико решења у интервалу $(0, 2\pi)$ има једначина

$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0?$$

(А) ниједно; (Б) једно; (В) два; (Г) три; (Д) бесконачно много;

66. Дате су функције $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x^2}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x^2}$,
 $f_4(x) = (\sqrt{x})^2$. Тачан је исказ:
 (А) све функције су међусобно једнаке; (Б) нема међусобно једнаких функција;
 (В) $f_1 = f_2 \neq f_3$; (Г) $f_1 = f_2 \neq f_3$ (Д) $f_1 \neq f_3 = f_4$.
67. Производ свих решења једначине $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ је:
 (А) 3; (Б) -3; (В) -1; (Г) -9; (Д) 9.
68. Ако је $\log_3 7 = a$, $\log_3 2 = b$, тада је $(\log_2 7 + \log_7 2)^{-1}$ једнако:
 (А) $\frac{a^2 - b^2}{ab}$; (Б) $\frac{a^2 + b^2}{ab}$; (В) $\frac{ab}{a^2 + b^2}$; (Г) $\frac{2a + 7b}{3ab}$;
 (Д) $\frac{7a + 2b}{ab}$.
69. Једначина $\sqrt{2x + 14} - \sqrt{x - 7} = \sqrt{x + 5}$
 (А) има два реална решења од којих је само једно позитивно;
 (Б) има два реална позитивна решења;
 (В) има само једно реално решење;
 (Г) има четири реална позитивна решења;
 (Д) нема реалних решења.
70. Права $ax + y - 5 = 0$ додирује елипсу $9x^2 + 16y^2 = 144$ ако и само ако је:
 (А) $a = \pm 2$; (Б) $a = \pm \frac{3}{4}$; (В) $a = \pm \frac{\pi}{4}$; (Г) $a = \pm \frac{6}{5}$;
 (Д) $a = \pm 1$.
71. Израз $\sin^4 x + \cos^4 x$ идентички је једнак
 (А) 1; (Б) $\sin 4x + \cos 4x$ (В) $1 + \cos^2 x$; (Г) $\frac{1 - 2 \cos 4x}{2}$; (Д) $\frac{3 + \cos 4x}{4}$.
72. Нека је S скуп свих реалних вредности параметра m таквих да једначина

$$2 \log x = \log(x + m) + 2 \log 2$$
 има два реална различита решења. Скуп S је:
 (А) једнак скупу \mathbb{R} ; (Б) празан скуп; (В) скуп $\{m : m > -1\}$;
 (Г) скуп $\{m : -1 < m < 0\}$; (Д) скуп $\{m : m > -1\}$.

73. Корени једначине $x^2 - x + a - 2 = 0$ задовољавају услов $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}x_1x_2 + 4 = 0$. Тада је

(А) $-1 \leq a \leq 1$; (Б) $a = \pm 1$; (В) $a = \pm\sqrt{2}$; (Г) $a = \sqrt{3}$ или $a = 4$; (Д) $0 < a < 1$.

74. За које су вредности реалног параметра m обе неједнакости

$$-3 < \frac{x^2 + mx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

задовољене за свако реално x ?

(А) $-6 < m < -1$; (Б) $-6 < m < 7$; (В) $-6 \leq m \leq 7$; (Г) $-1 < m < 2$;

(Д) ни за једно m .

75. Ако се обим земље повећа за 100см, тада је полупречник новог круга већи од полупречника земље за приближно

(А) 0,00159см; (Б) 0,0159см; (В) 0,159см; (Г) 1,59см; (Д) 15,9см.